Matematiikan laitos

Kombinatoriikka

Loppukoe

22.3.2012

1. Oletamme, että lottoarvonnassa käytettävät, numeroilla 1,2,...,39 merkityt pallot on asetettu renkaaksi jossain mielivaltaisessa järjestyksessä. Näytä laatikkoperiaatteen avulla, että renkaasta löytyy kolme vierekkäistä palloa, joista täsmälleen yksi on paritonnumeroinen ja kolme vierekkäistä palloa, joista täsmälleen yksi on parillisnumeroinen.

2. Merkitsemme $M = [1000000]\,(= \{1, 2, \ldots, 1000000\})$. Kuinka moni joukon M luvuista ei ole minkään luonnollisen luvun luvun neliö, kuutio tai viides potenssi?

3. Osoita, että luku $\binom{2n}{n}$ on parillinen jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

   [*Vihjeitä* löytyy Pascalin kolmiosta, mutta kolmio ei riitä ratkaisun perusteluksi.]

4. Olkoot $n, k \in \mathbb{N}$. Näytä, että luku $p_{n+k}(2n + k)$, eli luvun $2n + k$ $(n + k)$-partitioiden lukumäärä, on riippumaton luvun k arvosta.

   [Ohje: Näytä, että $p_{n+k+1}(2n + k + 1) = p_{n+k}(2n + k)$.]

   [*Vihje*: Huomaa, että luku 1 esiintyy jokaisessa luvun $2n+k$ $(n+k)$-partitiossa kun $k > 0$.]

5. Sanomme, että joukko $A \subset \mathbb{N}$ on *harva*, jos joukkoon A ei kuulu kahta peräkkäistä lukua (eli $k \in A \Rightarrow k + 1 \notin A$). Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ merkitsemme $\mathcal{A}_n = \{A \subset [n] : A \text{ on harva}\}$ ja $h_n = |\mathcal{A}_n|$. Pane merkille, että $h_0 = 1$ ja $h_1 = 2$. Etsi rekursioyhtälö luvuille h_k ja määritä luvut ratkaisemalla kyseinen yhtälö.

   [*Ohje*: Jaa perheen $\mathcal{A}_n$ joukot A kahteen ryhmään sen mukaan, onko $n \in A$ vai $n \notin A$.]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kombinatoriikka

Loppukoe

15.5.2012

1. Suorakulmaisen 3×7 ruudukon ruudut on väritetty, kukin ruutu joko punaiseksi tai siniseksi. Näytä, että väritetystä ruudukosta löytyy joillain $i > 1$ ja $j > 1$ sellainen suorakulmainen $i \times j$ osaruudukko, jonka neljä kulmaruutua ovat kaikki samanvärisiä.

2. Laske kuinka monella joukon $[850]$ ($= \{1, 2, \ldots, 850\}$) luvulla *ei ole* ykköstä suurempia yhteisiä tekijöitä luvun 850 kanssa.

3. Johda yhtälö

$$\binom{3n}{3} - 3\binom{n}{3} - 6n\binom{n}{2} = n^3$$

(a) laskemalla.

(b) kombinatorisen päättelyn avulla (käyttämättä lauseketta $\binom{k}{\ell} = \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}$).

4. Perustele yhtälö

$$\frac{1}{1-x} = (1 + x + x^2 + \cdots + x^9)(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{90})(1 + x^{100} + x^{200} + \cdots + x^{900}) \cdots$$

ja esitä sille tulkinta luonnollisen luvun tietynlaisia partitioita koskevana tuloksena.

5. Ratkaise rekursioyhtälö $r_n = 6r_{n-1} - 9r_{n-2}$ alkuarvoilla $r_0 = 1$ ja $r_1 = 2$.

Vihjeitä: Tehtävä 1: Laatikkoperiaate. *Tehtävä 2:* Summa- ja erotusperiaate.

Ohje tehtävään 3(b): Laske kahdella eri tavalla montako mahdollisuutta on valita n:n hevosen, n:n koiran ja n:n kissan joukosta hevonen, koira ja kissa.

Vihjeitä: Tehtävä 4: Geometriset summat. *Tehtävät 4 ja 5:* Generoivat funktiot.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Johdatus diskreettiin matematiikkaan

11.8.2011

Merkitse jokaiseen vastauspaperiisi sekä nimesi että henkilö- tai opiskelijatunnuksesi.

1. Osoita, että äärellisille joukoille A ja B voimassa

$$|A \setminus B| - |B \setminus A| = |A| - |B| \ .$$

[Ohje: Esitä luku $|A \cup B|$ kahdella eri tavalla.]

2. Olkoon f kuvaus $X \to Y$. Näytä, että kaikilla $A \subseteq X$ ja $B \subseteq Y$ on voimassa

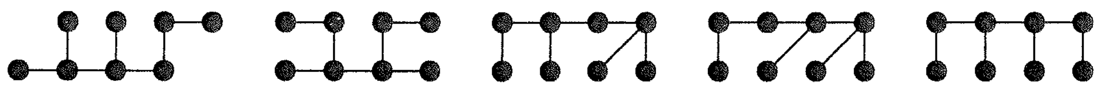
$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \text{ja} \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B \ .$$

3. Fibonacin lukujono $F_0, F_1, F_2, \ldots$ määritellään rekursiivisesti ehdoilla $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ja $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ jokaisella $n \geq 1$.
Todista induktiolla, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa epäyhtälö $F_n < (\frac{7}{4})^n$.

4. Pöydällä on neljätoista eri kirjaa. Monellako eri tavalla Elina, Jukka, Iiro ja Liisa voivat jakaa kirjat keskenään niin, että Elina saa viisi, Jukka neljä, Iiro kolme ja Liisa kaksi kirjaa?

[Vihje: Sanan EEEEEJJJJIIILL kirjainten uudelleenjärjestelyt]

5. Mitkä seuraavista puista ovat keskenään isomorfisia? Perustele vastauksesi!



T_a T_b T_c T_d T_e

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Johdatus diskreettiin matematiikkaan

25.10.2011

Merkitse jokaiseen vastauspaperiisi sekä nimesi että henkilö- tai opiskelijatunnuksesi.

1. Merkitsemme $D\Delta E$:llä joukkojen D ja E *symmetristä erotusta* $(D \setminus E) \cup (E \setminus D)$. Perustele Vennin kaavioiden avulla joukkoyhtälö

$$(A \cap B)\Delta\left[(B \cap C)\Delta(C \cap A)\right] = (A \cap B) \cup \left[(B \cap C) \cup (C \cap A)\right] .$$

2. Määrittelemme kuvauksen $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kaavalla

$$f(n,k) = n + (n+k)^2 .$$

Osoita, että f on injektio.

[*Ohje:* Näytä aluksi, että jos $n + k < m + \ell$, niin $f(n,k) < f(m,\ell)$.]

3. Johda seuraavat yhtälöt kombinatorisella päättelyllä (käytä siis binomikertoimen $\binom{p}{q}$ määritelmää kertoimelle johdetun lausekkeen $\frac{p!}{q!(p-q)!}$ asemasta).

(a) $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ jokaisella $n = 1, 2, 3, ...$

(b) $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$ jokaisella $n = 2, 3, 4, ...$

[*Ohje:* Jaa se $2n$-joukko, jonka osajoukkojen lukumääriä lasketaan, kahdeksi n-joukoksi.]

4. Todista induktiolla, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa yhtälö

$$\sum_{k=0}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1 .$$

5. "Binääripuulla" tarkoitamme sellaista puuta, jossa on yksi 2-asteinen piste ja kaikki muut pisteet ovat joko 3-asteisia tai lehtiä.

Näytä, että jokaisen binääripuun pisteiden lukumäärä on pariton.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Johdatus diskreettiin matematiikkaan

24.1.2008

Merkitse jokaiseen vastauspaperiisi sekä nimesi että henkilö- tai opiskelijatunnuksesi.

1. Osoita, että äärellisille joukoille A ja B voimassa

$$|A \setminus B| - |B \setminus A| = |A| - |B| .$$

2. Olkoon f kuvaus $X \to Y$. Näytä, että kaikilla $A \subseteq X$ ja $B \subseteq Y$ on voimassa

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \text{ja} \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B .$$

3. Fibonaccin lukujono $F_0, F_1, F_2, \ldots$ määritellään rekursiivisesti ehdoilla $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ja $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ jokaisella $n \geq 1$.
Osoita induktiolla n:n suhteen, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa:

luku F_{3n} on parillinen ja luvut F_{3n+1} ja F_{3n+2} ovat parittomia.

4. Pöydällä on kymmenen eri esinettä. Monellako eri tavalla Liisa, Eero, Pekka ja Irja voivat jakaa esineet keskenään niin, että Liisa saa 4, Eero 3, Pekka 2 ja Irja yhden esineen?
[Vihje: Sanan LLLLEEEPPI kirjainten uudelleenjärjestelyt]

5. Mitkä seuraavista puista ovat keskenään isomorfisia? Perustele vastauksesi!