Kombinatoriikka kurssikoe 29.6.2016 (1)

Malliratkaisut (11-0 Tyllt)

(1) Tarkastellaan 7-numeroisia puhelinnumeroita $r_1 \dots r_7$, missä $r_j \in \{0,1,\dots,9\}$ kun $j = 1,\dots,7$.

(i) (K.) eri puhelinnumeroiden lukumäärät? (sallitaan 0-alkuiset yms.)

ol. $A = \{0,1,\dots,9\}$. Tällöin puhelinnumero $r_1 \dots r_7$ vastaa

$(r_1,\dots,r_7) \in A^7$ (kartesinen tulo $A \times \dots \times A$ (7 kpl))

jolle $|A^7| = |A|^7 = \underline{\underline{10^7}}$ (3p.)

(ii) ol. $B = \{r_1 \dots r_7 \mid r_i \neq r_j \text{ kun } i \neq j\}$, ts. puhelinnumerot joissa jokainen numero on eri.

$|B|$ vastaa <u>7-permutaatioita</u> joukosta $A = \{0,1,\dots,9\}$

(eli injektiot $[6] \to \{0,1,\dots,9\}$). Teoria (Jukna, II. 3.12) $\Rightarrow$

$$|B| = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 604.800 \quad (3p.)$$

<u>Vaihtoehtoinen tapa:</u> ehto $r_i \neq r_j$ kun $i \neq j$ $\Rightarrow$

1. luku r_1 voidaan valita 10:stä vaihtoehdosta $\in A$
2. luku r_2 voidaan valita 9:stä vaihtoehdosta $\in A \setminus \{r_1\}$

⋮

7. luku r_7 voidaan valita 4:stä $(= 10 - 6)$ vaihtoehdosta $\in A \setminus \{r_1,\dots,r_6\}$

tulon $\Rightarrow$ periaate

$|B| = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$ (3p.)

---

(2) Johda yhtälö

$$(*) \quad \binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2, \quad n \geq 2$$

(i) binomikertoimen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ määritelmästä lähtien (3p.)

(ii) kombinatorisen argumentin avulla (3p.)

<u>Ratk</u> (i) V.P. (*):ssä:

$$\binom{2n}{2} = \frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!} = \frac{1}{2}\cdot 2n\,(2n-1) = n\,(2n-1) = 2n^2 - n$$

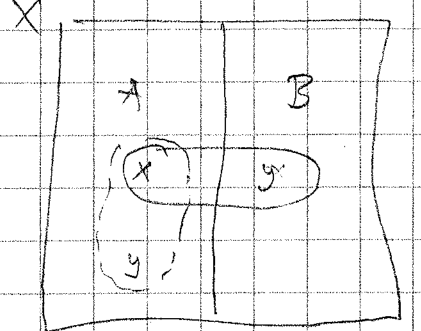
O.P. (*):ssä on

$$2\binom{n}{2}+n^2 = 2\cdot\frac{n!}{2!\,(n-2)!}+n^2 = \underbrace{n(n-1)}_{n^2-n}+n^2 = 2n^2-n$$

Siis O.P. = V.P., eli (*) voimassa. (3p.)

Kommentti: myös induktiotodistus OK ja sallittu

(ii) Ol. $|X| = 2n$, $X = A\cup B$ missä $|A| = n = |B|$ ja $A\cap B = \emptyset$.



$\binom{2n}{2} = |P_2(X)|$, eli 2-alkioisten osajoukkojen lukumäärä X:ssä:

$\{x,y\}\subset X$ voidaan valita kolmella erillisellä tavalla

(i) $\{x,y\}\subset A$, eli $\binom{n}{2}$ eri tapaa

(ii) $\{x,y\}\subset B$, eli $\binom{n}{2}$ eri tapaa

(iii) $x\in A$ ja $y\in B$ (tai päinvastoin) $\Leftarrow$ { x:llä n tapaa, y:llä n tapaa $\Rightarrow$ $n\cdot n = n^2$ eri valintaa }

yo. mahdollisuudet erillisiä $\Rightarrow$

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{2}+\binom{n}{2}+n\cdot n = 2\binom{n}{2}+n^2 \qquad (3p.)$$

---

3. Olkoon $X = [850]$ ja

$A = \{n\in[850]:$ n:llä ja 850:llä ei ykköstä suurempia tekijöitä $\}$.

Lasketaan $|A|$ (summa- ja erotusperiaatteen avulla)

Ratk. $850 = 2\cdot 5^2\cdot 17$ $(= 50\cdot 17)$ $\Rightarrow$ 850:llä alkulukutekijöinä

2, 5, 17

riittää tarkastella näitä (miksi?)

Ol. $B_1 = \{n\in[850]: 2\mid n\}$, $B_2 = \{n\in[850]: 5\mid n\}$, $B_3 = \{n\in[850]: 17\mid n\}$.

Tarkastellaan komplementtijoukkoa

$$A^c = \{ n \in [850] :\ 2|n \text{ tai } 5|n \text{ tai } 17|n \} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

on yhteisiä tekijöitä

Summa- ja erotusperiaate (SE) ⇒

$$(SE) \quad |B_1 \cup B_2 \cup B_3| = |B_1| + |B_2| + |B_3| - |B_1 \cap B_2| - |B_1 \cap B_3| - |B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3|$$

missä $|B_1| = 425$ (koska $\frac{850}{2} = 425$)

$|B_2| = 170$ $\left(\frac{850}{5} = 2 \cdot 5 \cdot 17 = 170 \right)$

$|B_3| = 50$ $\left(\frac{850}{17} = 2 \cdot 5^2 = 50 \right)$

$n \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow 2 \cdot 5 = 10 \,|\, n \Rightarrow |B_1 \cap B_2| = 85$

$n \in B_1 \cap B_3 \Leftrightarrow 2 \cdot 17 = 34 \,|\, n \Rightarrow |B_1 \cap B_3| = 25$ (koska $\frac{850}{34} = 5 \cdot 5 = 25$)

$n \in B_2 \cap B_3 \Leftrightarrow 5 \cdot 17 = 85$ jakaa $n \Rightarrow |B_2 \cap B_3| = 10$

Lopuksi $n \in B_1 \cap B_2 \cap B_3 \Leftrightarrow 2 \cdot 5 \cdot 17 = 170$ jakaa n eli $|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = 5$

(koska $\frac{850}{170} = 5$)

Siis (SE) ⇒

$$|A^c| = |B_1 \cup B_2 \cup B_3| = 425 + 170 + 50 - (85 + 25 + 10) + 5 = 650 - 120 = 530$$

$$\Rightarrow |A| = 850 - |A^c| = 850 - 530 = \underline{\underline{320}}$$

(6p)

Laskuvirheestä yms. −1p

4. Ratkaise rekursioyhtälö

$$(*) \quad \begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, & n \geq 0 \\ a_0 = 0, \quad a_1 = 1. \end{cases}$$

Ratk. yrite $a_n = r^n$ kun $n \geq 0$, ja $r \neq 0$

sijoitus (*):een ⇒ ehto

$$0 = r^{n+2} - 2r^{n+1} - r^n = \underbrace{r^n}_{\neq 0}(r^2 - 2r - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 - 2r - 1 = 0 \qquad \text{karakteristinen yhtälö}$$

4.

$$r^2 - 2r - 1 = (r-1)^2 - 2 = 0$$ eli juuret

$$r = 1 \pm \sqrt{2}$$

Teoria $\Rightarrow$ kaikki ratkaisut ovat

$$a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n, \qquad n \geq 0$$

missä $A, B \in \mathbb{R}$ mv. vakioita

alkuehdot $a_0 = 0,\ a_1 = 1 \xrightarrow[n=0,\, n=1]{\text{sijoita}}$ yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = -A}$$

sij. $B = -A$ toiseen yhtälöön $\Rightarrow$

$$1 = A(1+\sqrt{2}) - A(1-\sqrt{2}) = A\big(\underbrace{1+\sqrt{2} - (1-\sqrt{2})}_{2\sqrt{2}}\big) = 2\sqrt{2}A$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \left(= \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \quad B = -A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

siis haluttu (yksikäsitteinen) ratkaisu $(*)$:lle on

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n, \qquad n \geq 0$$

(6 p)

laskuvirhe yms. -1 p