Kombinatoriikka : kesätentti 11.8.2016 mallivastaukset (HOT)

1) (i) olk. $|A| = 100$, $|B| = 40$, $|A\cap B| = 30$.

Summan ja erotuksen periaate (Junnila: II.2) $\Rightarrow$

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| = 100 + 40 - 30 = \underline{\underline{110}}$$

(ii) ol. $|A\cup B\cup C| = 10$, $|A| = 4$, $|B| = 5$, $|C| = 6$,

$|A\cap B| = 1$, $|A\cap C| = 2$, $|B\cap C| = 2$.

Kys. $|A\cap B\cap C| = ?$ (Junnila: luku II.2)

Summan ja erotuksen periaate 3:lle joukoille $\Rightarrow$

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + \underbrace{|A\cap B\cap C|}_{\text{ratkaistaan tämän suhteen}}$$

$\Rightarrow$

$$|A\cap B\cap C| = |A\cup B\cup C| - |A| - |B| - |C| + |A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|$$

$$= 10 - (4+5+6) + (1+2+2) = 10 - 15 + 5 = \underline{\underline{0}}$$

siis (itse asiassa) $A\cap B\cap C = \emptyset$.

---

2. olk. $X = [6] = \{1,2,3,4,5,6\}$.

(i) eri relaatioiden $R \subset X\times X$ lukumäärä on

$$|\mathcal{P}(X\times X)| = 2^{|X\times X|} = 2^{|X|\cdot|X|} = 2^{|X|^2} = 2^{(6)^2} = 2^{36}$$

(teoria: $|\mathcal{P}(Y)| = 2^{|Y|}$, $|X\times X| = |X|\cdot|X|$, vrt. II.3.2 ja II.3.3)

(ii) relaatio $R \subset X\times X$ on symmetrinen jos aina

$(x,y)\in R \Rightarrow$ myös $(y,x)\in R$.

Symmetrinen relaatio $R \subset X\times X$ määräytyy seuraavasti:

diagonaalilla $D = \{(x,x) : x\in X\}$, joko $(x,x)\in R$ tai $(x,x)\notin R$

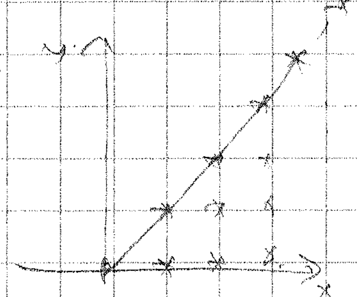
tällaisia mahdollisia pareja on $|D| = 6$ kpl

diagonaalin ulkopuolella: riittää tarkastella (x,y) missä $x > y$

(koska $(x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R$)

tällaisia pareja on yhteensä $\frac{36-6}{2} = 15$

(vaihtoehtoisesti: $1+2+3+4+5 = 15$)



Siis $\left|\{R \subset X\times X \mid R \text{ symmetrinen}\}\right| = |P(Y)| = 2^{|Y|}$,

missä $Y = \{(x,y)\in X\times X \mid x \geq y\}$

II.3.3

etenkin $\Rightarrow |Y| = \underset{\text{diagonaali } D}{6} + \underset{\text{osa } \{(x,y):\, x>y\}}{15} = 21 \Rightarrow \left|\{R\subset X\times X \mid R \text{ symm.}\}\right| = \underline{\underline{2^{21}}}$

3. **Väite** $\binom{2n}{n}$ on parillinen luku kaikilla $n\in\mathbb{N}^*$, siis

$$\binom{2n}{n} = 2k, \text{ missä } k\in\mathbb{N}^*.$$

muistutus: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ratk. Pascalin kaava (Lemma II.3.7) $\Rightarrow$

$$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1} \underset{\text{kertoimet}}{\overset{\text{bin.}}{=}}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{n!(\underbrace{2n-1-n}_{n-1})!} + \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(\underbrace{2n-1-(n-1)}_{n})!}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} + \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = 2\cdot \underbrace{\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}}_{=\binom{2n-1}{n}\in\mathbb{N}^* \text{ koska bin. kerroin}} \text{ parillinen luku.}$$

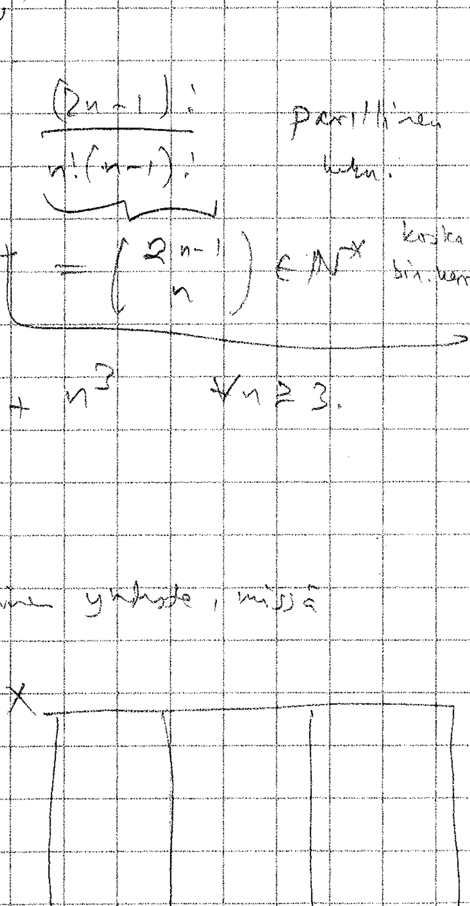
4. **Väite**:

$$(*) \quad \binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\cdot\binom{n}{2} + n^3 \quad \forall n\geq 3.$$

Ratk (kombinatorinen argumentti)

Ol. $|X| = 3n$ ja $X = A\cup B\cup C$ erillinen yhdiste, missä

$$|A| = |B| = |C| = 3$$



määritelmä $\Rightarrow$

$$\binom{3n}{3} = |P_3(X)|,$$

eli 3-alkioisten osajoukkojen $\subset X$ lukumäärä.

Toisaalta jaon $X = A\cup B\cup C$ suhteen 3-alkioisia osajoukkoja $\{u,v,z\}\subset X$ voidaan valita (erillisesti) seuraavilla tavoilla

Kombinatoriikka 11.8.2016 – mallivastaukset

(3.)

(i) $\{u,v,z\} \subset A$ tai B:stä tai C:stä

eri mahdollisuuksia $= 3\binom{n}{3}$ (3 kpl: A:sta tai B:stä tai C:stä)

$= |P_3(Y)|$ missä $|Y| = n$.

(ii) $\underbrace{\{u,v\}}_{1} \subset A$ ja $(\underbrace{z \in B \text{ tai } z \in C}_{2})$ (sekä symmetrisesti)

eri valintoja $\underset{(|Y|=n)}{|P_2(Y)|} = \binom{n}{2}$ kpl, eri mahd. $= 2n$ (koska $|B| = n$ ja $|C| = n$)

$\Rightarrow$ yhteensä eri mahdollisuuksia $= 3 \cdot 2n\binom{n}{2} = 6n\binom{n}{2}$

symmetriaperiaate

(iii) valitaan yksi alkio A:sta, yksi B:stä ja yksi C:stä

tuloperiaate $\Rightarrow$ eri mahdollisuuksia $= n \cdot n \cdot n = n^3$ kpl

Koska (i), (ii), (iii) erilliset $\Rightarrow$

$$\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3 \quad \text{kun } n \geq 3.$$

Kommentti (I) $n \geq 3$ tarvitaan jotta voidaan valita $\{u,v,z\} \subset A$ jne.

(II) (*) voidaan todistaa myös lähtien kaavasta

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, mutta tätä ei käytetty tehtävässä

(5.) Määrää $(a_n)_{n \geq 0}$ kun

$$(*) \quad \begin{cases} a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n, & n \geq 0 \\ a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

Ratk. yritetään $a_n = r^n$ $(r \neq 0)$ muotoa, $n \geq 0$.

$\Rightarrow a_{n+1} = r^{n+1}$, $a_{n+2} = r^{n+2}$ joten sijoitus

$$0 = r^{n+2} - 6r^{n+1} + 8r^n = \underbrace{r^n}_{\neq 0}(r^2 - 6r + 8), \text{ eli}$$

(KY) $\quad r^2 - 6r + 8 = 0$

Juuret?

$$0 = r^2 - 6r + 8 = (r-3)^2 + 8 - 9 = (r-3)^2 - 1$$

$\Leftrightarrow (r-3)^2 = 1$ eli $r = 3 \pm 1 = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$

Kombinatoriikka 11.8.2016 mallivastaukset

teoria $\Rightarrow$ yleinen ratk. on

$$a_n = A \cdot 4^n + B \cdot 2^n, \quad n \geq 0$$

missä $A, B \in \mathbb{R}$ mielivaltaisia

alkuehdot $a_0 = 0, \ a_1 = 1 \ \Rightarrow$ yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = -A}$$

Sijoitus 2. yht.: $4A - 2A = 1$ eli $2A = 1$ eli $\boxed{A = \frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow B = -A = -\frac{1}{2}$$

Siis (*):n ratkaisu on $a_n = \frac{1}{2} \cdot 4^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n), \ n \geq 0$