Lause *Olkoon I äärellinen joukko ja olkoot A_i, $i \in I$, keskenään erillisiä äärellisiä joukkoja. Tällöin joukko $\bigcup_{i \in I} A_i$ on äärellinen ja*

$$\boxed{\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = \sum_{i \in I} |A_i| \,.}$$

Todistus. Käytämme epäsuoraa päättelyä ja induktioperiaatetta samaan tapaan kuin kahdessa aikaisemmassa todistuksessa: teemme vastaväitteen ja merkitsemme m:llä pienintä luonnollista lukua $|I|$, missä I on äärellinen indeksijoukko, jota vastaa sellainen kokoelma keskenään erillisiä äärellisiä joukkoja A_i, $i \in I$, että lauseen johtopäätös *ei* toteudu.

Panemme merkille, että on voimassa $I \neq \emptyset$ (yllä tekemiemme sopimusten nojalla). Olkoon ι joukon I alkio. Merkitsemme $J = I \setminus \{\iota\}$. Tällöin on voimassa $|J| = |I| - |\{\iota\}| = m - 1$, joten lauseen johtopäätös toteutuu joukoille A_j, $j \in J$. Täten joukko $\bigcup_{j \in J} A_j$ on äärellinen ja $\left|\bigcup_{j \in J} A_j\right| = \sum_{j \in J} |A_j|$. Mutta nyt A_ι ja $\bigcup_{j \in J} A_j$ ovat keskenään erillisiä äärellisiä joukkoja, joten joukko $A_\iota \cup \bigcup_{j \in J} A_j$, eli joukko $\bigcup_{i \in I} A_i$, on äärellinen ja on voimassa

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = |A_\iota| + \left|\bigcup_{j \in J} A_j\right| = |A_\iota| + \sum_{j \in J} |A_j| = \sum_{i \in I} |A_i| \,.$$

Tämä on kuitenkin ristiriidassa joukkojen A_i, $i \in I$, oletetun ominaisuuden kanssa. □

Seuraus *Äärellisen monen äärellisen joukon yhdiste on äärellinen.*

Todistus. Olkoot $A_1, \ldots, A_n$ äärellisiä joukkoja. Merkitsemme $B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ jokaisella $k = 1, \ldots, n$ (huomaa, että $B_1 = A_1$, koska $\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i = \bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$). Jokaisella $k \leq n$ joukko B_k on äärellisen joukon A_k osajoukkona äärellinen. Kaikilla $1 \leq j < k \leq n$ on voimassa $B_j \subset A_j$ ja $B_k \cap A_j = \emptyset$, joten joukot B_j ja B_k ovat erilliset. Edellisen lauseen nojalla joukko $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ on äärellinen.

Panemme lopuksi merkille, että on voimassa $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Koska $B_k \subset A_k$ jokaisella $k = 1, \ldots, n$, on voimassa $\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Toisaalta on voimassa $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, sillä jos $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, niin epätyhjässä joukossa $\{i \leq n : x \in A_i\}$ on pienin luku m ja tälle pätee, että $x \in A_m \setminus \bigcup_{i<m} A_i = B_m$. □

Edellisen lauseen avulla voimme myös laskea kahden äärellisen joukon karteesisen tulon koon.

Lause *Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja. Tällöin joukko $A \times B$ on äärellinen ja*

$$\boxed{|A \times B| = |A| \cdot |B| \,.}$$

Todistus. Voimme esittää tulojoukon $A \times B$ yhdisteenä $\bigcup_{a \in A} (\{a\} \times B)$. Joukot $\{a\} \times B = \{(a, b) : b \in B\}$, $a \in A$, ovat keskenään erillisiä. Jokaisella $a \in A$, joukko $\{a\} \times B$ on $|B|$-joukko, koska kuvaus $b \mapsto (a, b)$ on bijektio $B \to \{a\} \times B$. Edellisen lauseen nojalla joukko $\bigcup_{a \in A} (\{a\} \times B)$, eli joukko $A \times B$, on äärellinen ja on voimassa

$$|A \times B| = \sum_{a \in A} |\{a\} \times B| = \sum_{a \in A} |B| = |A| \cdot |B| \,. \qquad \square$$

Määritämme myöhemmin erilaisten äärellisten joukkojen kokoja, kunhan saamme käyttöömme tarvittavia apuvälineitä. Esimerkiksi seuraavassa luvussa määritämme äärellisen joukon potenssijoukon koon käyttämällä hyväksi sopivaa induktioperiaatetta.