Mitta ja integraali – kesä 2015
Harjoitustehtävät 4

Perehdy luentomonisteeseen seuraavasti:

- Kokonaisuus 1: Opiskele kappaleet 1.67 ja 1.71
- Kokonaisuus 2: Opiskele luku 2

Kokonaisuus 1
(Jordan- ja Lebesgue-mitallisuus)

Tehtävä 1. Osoita, että joukko $(0,1] \cap \mathbb{Q}$ ei ole Jordan-mitallinen. Huomaa, että se on kuitenkin Lebesgue-mitallinen.

Johtopäätös: Lauseen 1.70 nojalla jokainen Jordan-mitallinen joukko on Lebesgue-mitallinen, mutta nyt näemme, ettei väite päde toiseen suuntaan.

Vihje: Käytä suoraan Jordan-mitallisuuden määritelmää. Eräästä aiemmasta harjoitustehtävästä on sen jälkeen hyötyä.

Tehtävä 2. * Osoita, että on olemassa sellaiset *erilliset* joukot $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$, että

$$m^*(A_1 \cup A_2) < m^*(A_1) + m^*(A_2).$$

Päättele, että ainakin toinen joukoista on ei-Lebesgue-mitallinen.

Tulkinta: Ulkomitalle ei yleisesti päde edes *äärellinen* täysadditiivisuus. Tämä korostaa tarvetta rajoittua mitallisten joukkojen tarkasteluun mielekkään mittateorian kehittämiseksi.

Vihje: On olemassa ei-Lebesgue-mitallinen joukko $B \subset \mathbb{R}$, jolle Charathéodoryn ehto ei siis päde.

Kokonaisuus 2
(Mitalliset kuvaukset)

Tehtävä 3. Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mitallisia kuvauksia. Selitä, miksi yhdiste $g \circ f$ ei ole välttämättä mitallinen.

Huomio: Jos g on *jatkuva* (erityisesti mitallinen), niin $g \circ f$ on mitallinen. Toisin päin tämä ei päde; jos f on jatkuva ja g ”vain” mitallinen, niin $g \circ f$ *ei ole välttämättä mitallinen.*

Tehtävä 4. Osoita:

a. Kahden mitallisen funktion $f, g : A \to \mathbb{R}$ tulo on mitallinen.
(Tulos pätee myös $\dot{\mathbb{R}}$-arvoisille funktioille, mutta tapausta ei tarvitse käsitellä.)

Vihje: Lauseen 2.11 todistuksen ajatuksia noudattelemalla todistus ei ole vaikea.

b. Joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ karakteristinen funktio $\chi_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in E^c \end{cases}$$

on mitallinen jos ja vain jos E on mitallinen.

Tehtävä 5. * Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mielivaltainen* funktio. Osoita, että funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{Q} \\ e^x - \sin(x)\cos(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

on mitallinen.

Opetus: Funktion ”muokkaus” määrittelyjoukon nollamittaisessa osajoukossa ei pilaa mitallisuutta.

Vihje: Keksi g:lle sellainen esitys $g = g_1 + g_2$, missä g_1 ja g_2 ovat mitallisia funktiota. Edellistä tehtävää sopii hyödyntää, samoin Lausetta 2.2.

Tehtävä 6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio. Oletetaan, että joukot

$$A_q = \{x \in A : f(x) \leq q\}, \quad q \in \mathbb{Q},$$

ovat mitallisia. Osoita, että A on mitallinen joukko ja f on mitallinen funktio.

Vihje: Lauseesta 2.2 on hyöytyä.

Tehtävä 7. * Osoita, että monotoninen funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

Vihje: Lauseesta 2.2 on hyöytyä. Huomaa myös, että riittää käsitellä ei-vähenevä tapaus, sillä luvulla -1 kertomalla...

Ylimääräinen tieto kiinnostuneille: Itse asiassa monotoninen funktio on lähes jatkuva; sillä voi olla vain hyppyepäjatkuvuuksia, korkeintaan numeroituva määrä.

Flow-viikonlopun kunniaksi tehtävät olivat tällä kertaa siinä. ☺