Mitta ja integraali – kesä 2015
Harjoitustehtävät 3

Perehdy luentomonisteeseen seuraavasti:

- Kokonaisuus 2: Opiskele kappaleet 1.43 ja 1.51 (s. 35–40)
- Kokonaisuus 3: Opiskele kappale 1.62

Kokonaisuus 1
(Ulkomitta, mitallisuus, mitta)

Tehtävä 1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ kuvaus. Määritellään joukot

$$A_r = \{x \in A : f(x) > r\}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Osoita: Jos $m^*(A_0) > 0$, on olemassa sellainen $r > 0$, että $m^*(A_r) > 0$.

Vihje: Subadditiivisuus.

Tehtävä 2. Tarkastellaan "keskimmäisten kolmannesten" Cantor-joukkoa C, joka määritellään seuraavasti: Olkoon $I_0 = [0,1] \subset \mathbb{R}$ ja $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, eli I_1 on muodostettu poistamalla keskimmäinen kolmannes $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ välistä I_0. Jatketaan samaan tapaan, eli muodostetaan $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ poistamalla molemmista I_1:n osaväleistä keskimmäiset kolmannekset. Samaa periaatetta noudattaen saadaan muodostettua ilmeisellä tavalla joukot $I_0, I_1, I_2, \ldots$. Lopuksi määritellään joukko

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x \in I_k \text{ kaikilla } k = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Osoita, että $C \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}$ ja $m(C) = 0$.

Tehtävä 3. * Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltainen joukko. Osoita:

a. Joukon reuna, ∂D, ja sisus, $\operatorname{int} D$, ovat mitallisia joukkoja.

b. Jos $m_n(\partial D) = 0$, niin D on mitallinen joukko.

Johtopäätös: Jos D on ei-mitallinen, on sen reunan mitan oltava positiivinen[1] ja D:n "ei-mitallisen osan" on sisällyttävä D:n reunaan. Tarkemmin sanoen joukon $D \cap \partial D$ on oltava ei-mitallinen, ja sillä on siten oltava myös positiivinen ulkomitta. (Kuitenkin mitallisen joukon reunalla voi aivan hyvin olla positiivinen mitta.)

[1] Tämä kielii joukon monimutkaisuudesta; kuvia paperille piirtelemällä voi vakuuttaa itsensä siitä, ettei $\mathbb{R}^2$: n osajoukko voi olla kovin yksinkertainen, mikäli sen reunapisteiden joukolla on positiivinen pinta-ala. Yksinkertaisia ei-mitallisia joukkoja ei siis ole.

Tehtävä 4. Olkoot $B_i \subset [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$, mitallisia. Oletetaan, että jokaisella indeksillä pätee

$$m(B_i) > \frac{2^i - 1}{2^i}.$$

Osoita, että leikkaus $\cap_{i \in \mathbb{N}} B_i$ on epätyhjä.

Vihje: Tarkastele komplementteja ja käytä subadditiivisuutta. Tyhjän joukon mitta ei voi olla positiivinen.

Kokonaisuus 2
(Yleistä mittateoriaa)

Tehtävä 5. Olkoon X mikä tahansa joukko ja $A \subset X$. Osoita:

a. $\mathcal{P}(X)$ on sigma-algebra

b. $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ on sigma-algebra.

Tehtävä 6. * Olkoon X mikä tahansa joukko ja $\Gamma_\alpha \subset \mathcal{P}(X)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, mielivaltainen perhe sigma-algebroja. (Tässä $\mathcal{A}$ on jokin indeksijoukko, mahdollisesti ylinumeroituva.) Osoita:

a. Leikkaus $\cap_{\alpha \in \mathcal{A}} \Gamma_\alpha = \{A \subset X : A \in \Gamma_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in \mathcal{A}\}$ on sigma-algebra.

b. Jos $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ on joukkoperhe, on olemassa pienin sigma-algebra Γ, joka sisältää perheen $\mathcal{V}$.

   Vihje: Pitää siis löytää sellainen sigma-algebra Γ, että (1) $\mathcal{V} \subset \Gamma$ ja (2) $\Gamma \subset \Gamma'$ jokaisella sigma-algebralla $\Gamma' \supset \mathcal{V}$. Hyödynnä tehtävän edellistä kohtaa ja tietoa, että $\mathcal{P}(X)$ on sigma-algebra.

   (Γ:aa kutsutaan perheen $\mathcal{V}$ generoimaksi sigma-algebraksi; esimerkiksi Borelin-sigma algebra $\operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$ on suljettujen joukkojen generoima sigma-algebra.)

Tehtävä 7. Olkoon $\mathcal{H}^s$ s-ulotteinen Hausdorffin mitta Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$, missä $s \in [0, \infty)$ on kiinnitetty. Määrittele $\mathcal{H}^s$-mitalliset joukot.

Kokonaisuus 3
(Mitan jatkuvuus)

Tehtävä 8. * Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $A_i \in \Gamma$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$ ja

$$A = \{x \in X : x \in A_i \text{ äärettömän monella indeksillä } i \in \mathbb{N}\}.$$

Osoita, että

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0.$$

Tulkinta: Jos jono $\mu(A_i)$ on summautuva, niin nollamitallista joukkoa lukuun ottamatta X:n mielivaltainen piste sisältyy vain äärellisen moneen A_i:hin.