Mitta ja integraali – kesä 2015
Harjoitustehtävät 2

Perehdy luentomonisteeseen seuraavasti:

- Kokonaisuudet 2–4: Opiskele kappale 1.21

Kokonaisuus 1
(Joukko-oppia)

Tehtävä 1. Olkoot $A_1, A_2, \ldots$ joukon X osajoukkoja. Määritellään X:n osajoukot

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k \quad \text{ja} \quad \liminf_n A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Osoita:

a. $x \in \limsup_n A_n$ jos ja vain jos $x \in A_k$ äärettömän monella indeksillä k.

b. $x \in \liminf_n A_n$ jos ja vain jos $x \in A_k$ jokaisella riittävän suurella indeksillä k.

Tehtävä 2. * Olkoot A ja B numeroituvia joukkoja. Osoita, että myös niiden karteesinen tulo, $A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$, on numeroituva.

Vihje: Muodosta $A \times B$:n alkioista taulukko.

Kokonaisuus 2
(Mitalliset joukot)

Tehtävä 3. Tässä tehtävässä kaikki joukot ovat $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja. Kaikki kohdat ratkeavat helposti luentomonisteen tulosten avulla; tässä ei tarvitse lähteä liikkeelle mitallisuuden määritelmästä (Carathéodoryn ehdosta) asti.

a. Olkoon $m^*(A) = 0$. Osoita, että jokainen $B \subset A$ on mitallinen.

b. Olkoon E mitallinen ja $m^*(F) = 0$. Osoita, että $E \cup F$ ja $E \setminus F$ ovat mitallisia.

(Tulkinta: mitallisen joukon "muokkaus" nollaulkomittaisella joukolla ei pilaa mitallisuutta.)

c. Olkoon E mitallinen ja $G \supset E$ sellainen, että $m^*(G \setminus E) = 0$. Osoita, että G on mitallinen.

Tehtävä 4. Osoita, että $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ovat mitallisia joukkoja.

Kokonaisuus 3
(Carathéodoryn ehto)

Tehtävä 5. Olkoon $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, missä A on mitallinen. Osoita, että

$$m^*(B \setminus A) = m^*(B) - m^*(A).$$

Tehtävä 6. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $A \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltainen osajoukko. Osoita, että

$$m^*(A) + m^*(E) = m^*(A \cup E) + m^*(A \cap E).$$

Vihje: Carathéodory $\times$ 2.

Tehtävä 7. * Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$. Todista, että jos kaikilla *avoimilla* n-väleillä pätee

$$m^*(I) \geq m^*(I \cap E) + m^*(I \setminus E),$$

niin silloin E toteuttaa myös Carathéodoryn ehdon, eli on mitallinen.

Vihje: Kyseessä on siis Lemman 1.27 pienen pieni yleistys, joka osoittaa, että Carathéodoryn ehdossa riittää tarkastella *avoimia* n-välejä. Todistus noudattelee kyseisen lemman todistusta.

Kokonaisuus 4
(Vielä vähän joukko-oppia)

Tehtävä 8. Olkoot $A_1, A_2, \ldots$ joukon X osajoukkoja. Osoita, että on olemassa sellaiset *erilliset* X:n osajoukot $B_1, B_2, \ldots$, että

$$B_i \subset A_i \quad \forall\, i \geq 1 \qquad \text{ja} \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$