Mitta ja integraali – kesä 2015
Harjoitustehtävät 1

Perehdy luentomonisteeseen seuraavasti:

- Kokonaisuudet 1–2: Lue esipuhe ja kertaa lukuun 0 kootut esitiedot
- Kokonaisuus 3: Opiskele lukua 1 kappaleen 1.21 alkuun asti (ei mukaan lukien)

Kokonaisuus 1

(Riemann ja Lebesgue tappelivat...)

Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan ei-negatiivisia funktioita $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$. Merkintä $(R) \int_0^\infty f(x)\, dx$ tarkoittaa tuttua Riemannin integraalia, ”pystypalkkimenettelyn” raja-arvoa. ”Vaakapalkkimenettelyn” raja-arvoa $(R) \int_0^\infty m(f^{-1}[y, \infty))\, dy$ kutsutaan Lebesguen integraaliksi. Tässä $m(f^{-1}[y, \infty))$ on joukon $f^{-1}[y, \infty)$ ”mitta” (pituuden yleistys).

Tehtävä 1. Laske funktion $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Lebesguen integraali käyttäen hyödyksesi tietoa, että välin $I \subset \mathbb{R}$ mitta, $m(I)$, on kyseisen välin pituus. Vertaa lopulta saamaasi tulosta Riemannin integraaliin.

Tehtävä 2. Määritellään funktio $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{muutoin} \end{cases}$$

joka saa nollasta poikkeavan arvon vain välin $(0, 1]$ rationaalisissa pisteissä. Osoita, ettei funktion f Riemannin integraali ole määritelty. Mutta Lebesguen integraalipa on määritelty! Laske se hyödyntäen tietoa, että joukon $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ mitta $m((0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ (tämä todistetaan myöhemmin kurssilla).

Syy tämän tehtävän havaintoihin on se, että rationaalilukuja on ”vähän”, vain numeroituva määrä, joista Lebesguen integraali ei lainkaan välitä, kun taas Riemannin integraalin määrittelyssä ajauduttiin ongelmiin.

Opetus: Lebesguen integraali antoi saman tuloksen kuin Riemannin integraali, kun jälkimmäinen oli määritelty. Lisäksi Lebesguen integraali saattaa olla määritelty vaikkei Riemannin integraali olisi. Kyseessä ei ole sattuma, kuten myöhemmin opimme, vaan paremman integroimisteorian alku.

Kokonaisuus 2
(Joukko-oppia)

Tehtävä 3. Olkoon $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ X:n joukkoperhe ja $B \subset X$. Osoita:

a. $(\cap_\alpha V_\alpha)^c = \cup_\alpha V_\alpha^c$

b. $B \cup (\cap_\alpha V_\alpha) = \cap_\alpha (B \cup V_\alpha)$

Tehtävä 4. * Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, missä X ja Y ovat epätyhjiä joukkoja. Olkoon $\{W_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ Y:n joukkoperhe ja $B \subset Y$. Osoita:

a. $f^{-1}(\cup_\beta W_\beta) = \cup_\beta f^{-1} W_\beta$

b. $f^{-1}(\cap_\beta W_\beta) = \cap_\beta f^{-1} W_\beta$

c. $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}B)^c$

Voimme siis todeta, että alkuvat ja joukko-opilliset operaatiot kunnioittavat toisiaan. On syytä muistaa, että sama ei päde joukkojen kuville: vaikka esimerkiksi $f(\cup_\alpha V_\alpha) = \cup_\alpha f(V_\alpha)$, niin yleisesti vain $f(\cap_\alpha V_\alpha) \subset \cap_\alpha f(V_\alpha)$; yhtäsuuruus ei välttämättä toteudu.

Tehtävä 5. Osoita, että potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ on ylinumeroituva, eli luonnollisten lukujen osajoukkoja on ylinumeroituva määrä. (Numeroituvalla äärettömällä joukolla on siis ylinumeroituva määrä osajoukkoja.)

Vihje: Huomaa, että jokainen osajoukko $A \subset \mathbb{N}$ voidaan esittää yksikäsitteisesti jonona $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, missä $a_n = 1$ jos $n \in A$ ja $a_n = 0$ jos $n \notin A$. Kääntäen, jokainen jono $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ykkösiä ja nollia vastaa yksikäsitteistä osajoukkoa $A \subset \mathbb{N}$. Riittää siis osoittaa, että ykkösistä ja nollista koostuvia jonoja on ylinumeroituva määrä, joka onnistuu matkimalla Esimerkin 0.19 lävistäjäargumenttia.

Tehtävä 6. * Olkoon I indeksijoukko ja $a_i > 0$ jokaisella $i \in I$. Oletetaan lisäksi, että

$$\sum_{i \in I} a_i := \sup_{J \subset I \text{ äärellinen}} \sum_{j \in J} a_j < \infty.$$

Osoita, että I on numeroituva joukko.

Vihje: Tarkastele indeksijoukkoja $J_k = \{i \in I : a_i > \frac{1}{k}\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Kokonaisuus 3
(Lebesguen ulkomitta)

Tehtävä 7.

a. Olkoon $a \in \mathbb{R}^n$. Osoita Lebesguen ulkomitan määritelmää käyttäen, että yksiön $\{a\}$ ulkomitta on 0.

b. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ numeroituva joukko. Osoita subadditiivisuuden avulla, että joukon A ulkomitta on 0.

   Vihje: Mielivaltaisen joukon voi esittää yksiöiden yhdisteenä.
   (Huomio: Tehtävän ratkaisu onnistuisi myös matkimalla Esimerkkiä 1.6.)

Tehtävä 8. *

a. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että joukon $\{a\} \times \mathbb{R} = \{(a, x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ulkomitta on 0.

b. Osoita, että joukon $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ ulkomitta on 0.

Tehtävä 9. Osoita, että Lebesguen ulkomitta on *translaatioinvariantti.* Toisin sanoen, kaikille joukoille $A \subset \mathbb{R}^n$ ja pisteille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$m_n^*((A + x) = m_n^*(A),$$

missä $A + x = \{a + x : a \in A\} \subset \mathbb{R}^n$.