Mitta ja Integraali
Kesä 2015
Harjoitus 7

Lue monistetta sivulle 84 asti. Nämä ovat viimeiset harjoitustehtävät. Palautus vasta **torstaina** klo. 1600.

Tehtävä 1 *Laske raja-arvo*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} e^{-kx^2}\ dx.$$

Tehtävä 2 *Laske*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}}\ dx.$$

Tehtävä 3 ** Laske*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \frac{nx^s}{1+ns}\ dx,$$

missä $0 < s < 1$.

Tehtävä 4 *Osoita, että funktio* $\frac{\cos(x)}{x}$ *ei ole integroituva yli joukon* $[\pi/2, \infty]$, *eli*

$$\int_{\pi/2}^{\infty} |\frac{\cos(x)}{x}|\ dx = \infty.$$

(Sillä on kuitenkin epä-oleellinen (Riemann- tai Lebesgue-) integraali

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\pi/2}^{k} \frac{\cos(x)}{x}.$$

Todistusta ei tarvitse esittää; menee samoin kuin materiaalin esimerkissä 4.44.)

Tehtävä 5 ** Olkoon* $f : \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ *integroituva. Todista Chebychevin epäyhtälö*

$$m(\{x : |f(x)| > t\}) \leq \frac{\int |f|}{t} \quad (\forall t > 0)$$

Tehtävä 6 ** Olkoon* f *integroituva. Osoita, että funktio* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(tx)\ dx,$$

on jatkuva.

(g on funktion f Fourier muunnos.)

Tehtävä 7 *Olkoon* f *integroituva. Osoita, että jokaisella* $\epsilon > 0$ *löytyy mitallinen joukko* $A \subset \mathbb{R}^n$ *siten, että* $m(A) < \infty$ *ja*

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus A} f\ dm < \epsilon.$$

Tehtävä 8 *Lue Fatoun Lemman standarditodistus ja esitä se tässä. Lisää itsellesi välivaiheita jos siltä tuntuu.*