Mitta ja Integraali
Kesä 2015
Harjoitus 6

Lue monistetta sivulle 71 asti.

Kappale 4.2.

Tehtävä 1 *Etsi* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *ja* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *kun*

a) $a_n = (-1)^n$

b) $a_n = (-n)^n$

c) $a_n = (-\frac{1}{n})^n$

Tehtävä 2 ** Etsi* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *ja* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *kun*

a) $a_n = \frac{1+n\sin(k\pi/2)}{1+n}$

b) $a_n = (-1)^n \frac{n^2+5n}{n^2-4n}$

c) $a_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} (-\frac{1}{2})^k$

Kappale 2.8.

Tehtävä 3 *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sellainen mitallinen kuvaus, että derivaatta* $f'(x)$ *on olemassa kaikilla* $x \in \mathbb{R}$. *Osoita, että derivaatta* f' *on mitallinen kuvaus; eli mitallisuus ei katoa derivoitaessa (kunhan derivaatta on olemassa).*

(Vihje: Lue materiaalia.)

Kappale 4.15.

Tehtävä 4 (MKL) ** Laske raja-arvo*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x + \sin^k(x)}}\, dx$$

Tehtävä 5 *Laske*

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{x^k}{x^k e^x + 1}\, dx$$

Tehtävä 6 (Laskevan konvergenssin lause.) ** Olkoon meillä laskeva jono positiivisia mitallisia funktioita:* $f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq 0$. *Monotonisuuden perusteella, ja koska jono on alhaalta rajoitettu, ne suppenevat pisteittäin kohti jotakin funktiota* f. *Miksi* f *on mitallinen? Osoita sitten, että jos* $\int f_1 < \infty$ *niin pätee*

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n = \int f.$$

(Vihje: [1]*)*

Tehtävä 7 *Anna esimerkki positiivisesta mitallisesta funktiojonosta* $(f_k)_k$ *siten, että* $\exists \lim_{k \to \infty}(x)$ *m.k.* x, *mutta ei päde*

$$\lim_{k \to \infty} \int f_k = \int \lim_{k \to \infty} f_k.$$

Tehtävä 8 *Olkoon* $f \geq 0$ *mitallinen kuvaus ja* E_k *mitallinen joukko kaikilla* $k \in \mathbb{N}$. *Osoita, että jos joukot* E_k *ovat erillisiä, niin pätee*

$$\int_{\bigcup_k E_k} f = \sum_k \int_{E_k} f.$$

(Tästä seuraa, että joukkofunktio $Leb \ni E \to \int_E f$ *on mitta.)*

[1] Käytä Lausetta 3.30 ja Laskevan konvergenssin lausetta L. 1.64. Myös MKL:n todistuksesta voi hakea inspiraatiota.