Mitta ja Integraali
Kesä 2015
Harjoitus 3

Lue monistetta sivulle 60 asti.

Harjoitusta mittateoriaan.

Tehtävä 1 *Olkoon joukot* $A_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}$, *mitallisia ja erillisiä. Oletetaan, että* $m(A_\alpha) > 0$ *kaikilla* $\alpha \in \mathcal{A}$. *Osoita, että indeksijoukko* $\mathcal{A}$ *on numeroituva.*

(Eli sanoin: $\mathbb{R}^n$*:stä voi valita korkeintaa numeroituvan monta erillistä positiivimittaista joukkoa.)*

Tehtävä 2 *Olkoon* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *mitallinen. Osoita, että joukko* $\{x : m(f^{-1}(x)) > 0\}$ *on numeroituva.*

Kappale 2.3. Mitallinen kuvaus.

Tehtävä 3 *Osoita, että joukko* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ 0 \le yx^2 < 1\}$ *on mitallinen.*

Tehtävä 4 *

A) *Olkoon funktiot* $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *mitallisia. Osoita, että joukko*

$$\{x : f_{n+1}(x) \ge f_n(x)\},$$

on mitallinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

B) *Osoita, että joukko*

$$\{x : \textit{lukujono } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \textit{on kasvava.}\},$$

on mitallinen.

Luku 3. Lebesguen integraali.

Tehtävä 5 * *Anna esimerkki funktiojonosta* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *siten, että funktiot* f_n *ovat Riemann-integroituvia, kaikilla* $x \in [a, b]$ *on olemassa raja-arvo* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) := f(x)$, *mutta rajafunktio* f *ei ole Riemann-integroituva.*
(Tämä piirre, että Riemann-integroituvuus ei säily pisteittäisissä rajoissa, on Riemann-integraalin suurin puute–ei niinkään se, että sillä ei voi integroida "monimutkaisempia fuktioita".)

Tehtävä 6 *Olkoon* φ *yksinkertainen, eli sillä on esitys* $\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$, *missä* A_k *ovat mitallisia joukkoja ja* $a_k \ge 0$ *(joten* φ *on mitallinen funktio). Joukot* A_k *eivät välttämättä ole erillisiä. Osoita, että* φ*:llä on myös esitys* $\varphi = \sum_{i=1}^j b_i \chi_{B_i}$, *missä* B_i *ovat erillisiä. Tätä kutsutaan normaaliesitykseksi.*

Tehtävä 7 *Lue Lause 3.30. Olkoon* $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *mitallinen. Osoita, että "graafijoukko"*

$$\mathcal{G}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) : 0 \leq y < f(x)\},$$

on m_{n+1}*-mitallinen.*

Tehtävä 8 ** Olkoon* $f : E \to \dot{\mathbb{R}}$ *mitallinen,* $f \geq 0$*, ja* $\int f < \infty$*. Osoita, että*

$$m(\{x \in E : f(x) = \infty\}) = 0.$$

(Väitteen voi myös ilmaista näin: $f(x) < \infty$ *melkein kaikilla* $x \in E$*.)*