MATEMATIIKKA TUTUKSI -KURSSI

Logiikka

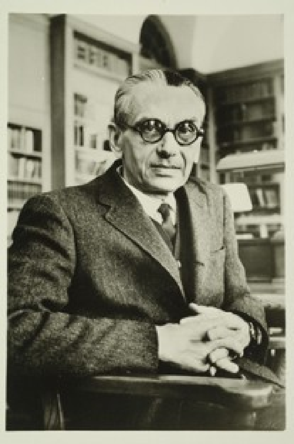
Avoin yliopisto & Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto
Kesä 2015

Juulia Lahdenperä

Logiikka

Siinä missä matematiikka etsii vastauksia matemaattisiin kysymyksiin, logiikka tutkii näitä kysymyksiä itsessään. Tutustumme seuraavaksi propositio- eli lauselogiikkaan, jossa tarkastellaan formaalien lauseiden ominaisuuksia, ennenkaikkea niiden totuusarvoja.

Eräs merkittävimmistä loogikoista oli itävaltalais-amerikkalainen Kurt Gödel, joka tunnetaan parhaiten syvällisistä ja käänteentekevistä epätäydellisyyslauseistaan. Näihin tuloksiin voi tutustua matemaattisen logiikan syventävillä kursseilla.



Kurt Gödel (1906-1978)

Propositiosymbolit ja konnektiivit

Propositio eli lause koostuu jakamattomista väittämistä (propositiosymboleista), kuten $A =$ "sataa" ja $B =$ "tuulee", sekä niitä yhdistävistä **konnektiiveista**:

negaatio	$\neg A$	"ei A" ("ei sada")
konjunktio	$A \wedge B$	"A ja B" ("sataa ja tuulee")
disjunktio	$A \vee B$	"A tai B" ("sataa tai tuulee")
implikaatio	$A \rightarrow B$	"jos A, niin B" ("jos sataa, niin tuulee")
ekvivalenssi	$A \leftrightarrow B$	"A jos ja vain jos B" ("sataa joss. tuulee")

Sulkeet ja sidontajärjestys

Konnektiivien välinen sidontajärjestys:

1. $\neg$ on vahvin
2. $\wedge$ ja $\vee$ ovat heikompia kuin $\neg$, mutta vahvempia kuin $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$
3. $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ ovat heikoimmat

Konnektiiveista vahvin sitoo argumenttinsa ensin. (Vertaa laskutoimituksiin: $2 + 3 \cdot 5 = 2 + (3 \cdot 5)$.)
Esimerkiksi

- $\neg A \wedge B$ tarkoittaa samaa kuin $(\neg A) \wedge B$, ei $\neg(A \wedge B)$
- $A \wedge B \rightarrow B \vee C$ tarkoittaa samaa kuin $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee C)$, ei $A \wedge (B \rightarrow B) \vee C$
- sulkeita ei voi poistaa lauseesta $(A \rightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C)$ ilman, että merkitys muuttuu

Konjunktioiden ja disjunktioiden ketjutus

Ketjutettaessa konjunktioita tai disjunktioita voidaan sulkeet jättää pois:

- $(A \wedge B) \wedge C$ tarkoittaa samaa kuin $A \wedge (B \wedge C)$, joten voimme kirjoittaa kyseisen proposition ilman sulkeita $A \wedge B \wedge C$
- $(A \vee B) \vee C$ tarkoittaa samaa kuin $A \vee (B \vee C)$, joista kirjoitamme $A \vee B \vee C$

Sulkeita ei kuitenkaan voi jättää pois molempia $\wedge$ ja $\vee$ sisältävistä propositioista: $(A \wedge B) \vee C$ ei tarkoita samaa kuin $A \wedge (B \vee C)$.

Luonnollisen kielen lauseiden formalisointi

Luonnollisen kielen lauseen formalisointi etenee kahdessa vaiheessa:

- tunnistetaan "jakamattomat väittämät"
- tunnistetaan konnektiivit

Esimerkki:

"On pilvistä	ja	ajan autoa."
A	$\wedge$	B

"Jos on pilvistä,		ajan autoa."
A	$\rightarrow$	B

"En aja autoa,		jos ei ole pilvistä."
$\neg A$	$\rightarrow$	$\neg B$

Tässä "jakamattomat väittämät" ovat A = "On pilvistä." ja B = "Ajan autoa."

Totuusarvot

Propositiolla on **totuusarvo** 1 (tosi) tai 0 (epätosi). Konnektiivien totuusarvotaulukko näyttää seuraavalta:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Taulukosta nähdään, että väittämien A ja B välillä on ekvivalenssi ainoastaan silloin, kun niillä on samat totuusarvot (joko $A = B = 1$ tai $A = B = 0$).

Esimerkki totuusarvoista

Millä propositioiden A ja B totuusarvoilla lause $\neg(A \vee \neg B)$ on tosi?

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$\neg(A \vee \neg B)$
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

Lause $\neg(A \vee \neg B)$ on siis tosi täsmälleen silloin, kun A on epätosi ja B on tosi.

Toinen esimerkki totuusarvoista

Millä propositioiden A, B ja C totuusarvoilla lause $A \to B \land C$ on epätosi?

A	B	C	$B \land C$	$A \to B \land C$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

$A \to B \land C$ on siis epätosi täsmälleen silloin, kun A ja B ovat tosia ja C epätosi, tai kun A ja C ovat tosia ja B on epätosi, tai kun A on tosi ja B ja C ovat epätosia.

Tehtävä totuusarvoista

Millä propositioiden A ja B totuusarvoilla lause $(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow A \wedge B$ on tosi?

Ratkaisu: Kyseisen proposition totuustaulu on

A	B	$\neg B$	$A \leftrightarrow \neg B$	$A \wedge B$	$(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow A \wedge B$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1

Propositio $(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow A \wedge B$ on siis tosi täsmälleen silloin, kun A:lla ja B:llä on sama totuusarvo.

Aarne, Boris ja Camilla I

Tiedetään, että yksi kolmesta epäillystä (Aarne, Boris ja Camilla) on syyllinen rikokseen. Tiedetään lisäksi, että syyttömät puhuvat totta ja syylliset valehtelevat. Kuulusteluissa sanottua:

- Aarne: "Minä olen syyllinen tai Camilla on syyllinen."
- Boris: "Syyllinen en ole minä eikä Aarne."
- Camilla: "Aarne on syyllinen tai Boris on syyllinen."

Kuka on syyllinen?

Ratkaisu: Kirjoitetaan ensin epäiltyjen kuulusteluissa sanomat lauseet propositiologiikan kaavoilla. Merkitään tätä varten

$A =$ "Aarne on syytön."
$B =$ "Boris on syytön."
$C =$ "Camilla on syytön."

Aarne, Boris ja Camilla II

Nyt voidaan kirjoittaa

Aarnen tunnustus:	$\neg A \vee \neg C$
Boriksen tunnustus:	$A \wedge B$
Camillan tunnustus:	$\neg A \vee \neg B$

Laaditaan totuustaulu. Kaikkia vaakarivejä ei tarvita, sillä täsmälleen yksi on syyllinen.

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$\neg A \vee \neg C$	$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1

Syyllinen valehtelee ja syyttömät puhuvat totta. Etsitään siis vaakarivi, jolla A:lla on sama totuusarvo kuin Aarnen tunnustuksella , B:llä sama totuusarvo kuin Boriksen

Aarne, Boris ja Camilla III

tunnustuksella ja C:llä sama totuusarvo kuin Camillan tunnustuksella. Ensimmäinen vaakarivi on sellainen, joten Camilla on syyllinen.

Tautologia, kontigentti, ristiriita

Propositio on **tautologia**, jos sen totuusarvo on 1 kaikilla siinä esiintyvien propositiosymbolien totuusarvoilla. Propositio on **ristiriita**, jos sen totuusarvo on 0 kaikilla siinä esiintyvien propositiosymbolien totuusarvoilla. Propositio on **kontigentti**, jos se ei ole tautologia eikä ristiriita.

Esimerkki tautologiasta

Tutkitaan propositiolausetta $A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$. Osoitetaan, että se on tautologia osoittamalla, että lauseet $A \wedge B$ ja $\neg(\neg A \vee \neg B)$ saavat saman totuusarvon kaikilla jakaumilla:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$	$\neg(\neg A \vee \neg B)$
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0

Koska lauseet $A \wedge B$ ja $\neg(\neg A \vee \neg B)$ saavat samat totuusarvot kaikilla propositioiden A ja B totuusarvoilla, ne ovat loogisesti ekvivalentit. Tällöin propositiolause $A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ on aina tosi ts. tautologia.