Matematiikka tutuksi -kurssi

Lukujonot ja induktio

Avoin yliopisto & Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto
Kesä 2015

Juulia Lahdenperä

Induktio

Matemaattinen induktio on erittäin hyödyllinen todistusmenetelmä, jota sovelletaan laajasti. Sitä verrataan usein dominoefektiin eli ketjureaktioon, jossa ensimmäisen dominopalikka kaataa kaatuessaan toisen, toinen kolmannen, jne. Tällä tavalla jokainen jonon palikoista lopulta kaatuu.

Matematiikassa on usein tarve todistaa, että **jokaisella luonnollisella luvulla** on jokin ominaisuus, tai että jokin väite pätee **millä tahansa luonnollisella luvulla**. Esimerkkejä tällaisista väitteistä ovat mm. "jokainen luku on joko pariton tai parillinen" ja "kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee, ett n-alkioisessa reaalilukujoukossa on suurin reaaliluku". Tällaisten väitteiden todistamisessa on usein käytettävä induktiota sen sijaan, että tutkittaisiin jokainen tapaus erikseen. (Äärellisillä joukoilla jokaisen tapauksen tutkiminen erikseen on mahdollista, mutta ei aina kovinkaan mielekästä.)

Induktioperiaate

Induktioperiaate jakautuu kahteen osaan:

1. Osoitetaan, että väite pätee tapauksessa $n = 1$.
2. Osoitetaan, että jos väite pätee jollakin $k \in \mathbb{N}$, niin väite pätee myös tapauksessa $k + 1$.

Tällöin induktioperiaatteen nojalla väiteä pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Induktioperiaate I

Esimerkki. Osoitetaan induktiolla, että

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

Todistus. Tarkistetaan ensin, että yhtälö pätee tapauksessa $n = 1$. Kun $n = 1$, niin yhtälön vasen puoli on 1. Yhtälön oikea puoli on

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Näin ollen yhtälö pätee tapauksessa $n = 1$.

Tehdään sitten **induktio-oletus**: Oletetaan, että yhtälö pätee jollakin $k \in \mathbb{N}$, eli

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Induktioperiaate II

Induktioväite: Yhtälö pätee myös tapauksessa $k+1$, ts.

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Induktioväitteen todistus. Huomaa, että induktioväitteen todistuksessa tarvitaan aina induktio-oletusta. Lähdetään liikkeelle kaavan vasemmasta puolesta:

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+k+(k+1) &\overset{IO}{=} \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Näin ollen jos yhtälö pätee jollakin $k\in\mathbb{N}$, niin se pätee myös tapauksessa $k+1$.

Induktioperiaatteen nojalla yhtälö pätee siten kaikilla $n\in\mathbb{N}$.

Lyhennysmerkintä summalle ja tulolle

Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalilukuja. Niiden summasta ja tulosta käytetään seuraavia lyhennysmerkintöjä:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ja

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Juuri äsken induktiolla todistettu summakaava voidaan kirjoittaa tällä lyhennysmerkinnällä muodossa

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktioperiaate I

Esimerkki. Osoitetaan induktiolla, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$ pätee

$$\sum_{m=1}^{n} 2^{m-1} = 2^n - 1.$$

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta $n = 1$. Yhtälön vasen puoli on $2^{1-1} = 2^0 = 1$ ja oikea puoli $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Näin ollen yhtälö pätee tapauksessa $n = 1$.

Induktio-oletus: Oletetaan, että summakaava pätee jollakin $k \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että yhtälö pätee tällöin myös tapauksessa $k + 1$ eli

$$\sum_{m=1}^{k+1} 2^{m-1} = 2^{k+1} - 1$$

(induktioväite).

Induktioperiaate II

Induktioväitteen todistus:

$$\sum_{m=1}^{k+1} 2^{m-1} = \sum_{m=1}^{k} 2^{m-1} + 2^{k+1-1} \overset{IO}{=} 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1,$$

joten induktioväite pätee.

Näin ollen induktioperiaatteen nojalla alkuperäinen yhtälö pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

Lukujonojen merkinnöistä

Merkitsemme lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ muodostamaa jonoa $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_k)_{k=1}^n$, missä a_k on jonon k:s termi (tai jäsen). Jono voi olla myös päättymätön, jolloin merkitään $(a_1, a_2, \ldots) = (a_k)_{k=1}^\infty$.

Esimerkiksi

- $a_k = k$, $(a_k)_{k=1}^n = (1, 2, 3, \ldots, n)$
- $a_k = k^2$, $(a_k)_{k=1}^\infty = (1, 4, 9, \ldots)$

Huomautus

On hyvä pitää mielessä, että periaatteessa jonon ensimmäisten termien luetteleminen ei riitä yksikäsitteisesti määräämään jonossa myöhemmin tulevia termejä.

Esimerkki. Mikä on seuraava luku jonossa $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$? Luonnollisesti miellämme, että kyseessä on jono $(k)_{k=1}^{\infty}$, jolloin seuraava luku on 6, mutta eihän näin täydy välttämättä olla! Miksei kyseessä voisi olla vaikka jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, missä

$$a_k = k + (k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)?$$

Tällöin

$a_1 = 1 + (0)(-1)(-2)(-3)(-4) = 1$

$a_2 = 2 + (1)(0)(-1)(-2)(-3) = 2$

$a_3 = 3 + (2)(1)(0)(-1)(-2) = 3$

$a_4 = 4 + (3)(2)(1)(0)(-1) = 4$

$a_5 = 5 + (4)(3)(2)(1)(0) = 5$

$a_6 = 6 + (5)(4)(3)(2)(1) = 126$

Aritmeettinen jono

Aritmeettisessa jonossa kahden peräkkäisen termin erotus on vakio, ts. $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on aritmeettinen, jos on olemassa sellainen $d \in \mathbb{R}$, että

$$a_{k+1} - a_k = d$$

kaikilla $k \geq 1$. Aritmeettisen jonon, jonka peräkkäisten termien erotus on d, k:s termi on siis $a_k = a_1 + (k-1)d$. (Osaatko perustella tämän induktiolla?)

Esimerkki.

- $a_k = k$, $(a_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 2, 3, \dots)$ on aritmeettinen ($d = 1$)
- $a_k = 2k - 1$, $(a_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 3, 5, \dots)$ on aritmeettinen ($d = 2$)
- $a_k = k^2$, $(a_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 4, 9, \dots)$ ei ole aritmeettinen
- $a_k = 2^{k-1}$, $(a_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 2, 4, 8, \dots)$ ei ole aritmeettinen

Aritmeettisen jonon summa

Aritmeettisen jonon $(a_k)_{k=1}^n$, jonka peräkkäisten termien erotus on d, summa saadaan kaavasta

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Todistus:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) = \sum_{k=1}^{n} a_1 + \sum_{k=1}^{n}(k-1)d$$

$$= na_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = na_1 + d\sum_{k=1}^{n-1} k = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d$$

Tätä kaavaa on hyvä käyttää, kun tietää peräkkäisten termien erotuksen. Summan voi kuitenkin laskea ilmankin d:tä, mikäli tietää jonon pituuden lisäksi ensimmäisen ja viimeisen termin:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n\frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Aritmeettisen jonon summa - Esimerkki 1

- Jonon $(2k-1)_{k=1}^{10} = (1, 3, 5, 7, \ldots, 19)$ summa on
$$n\frac{a_1 + a_n}{2} = 10 \cdot \frac{1+19}{2} = 100.$$
- Jonon $(5, 8, 11, \ldots)$ kahdenkymmenen ensimmäisen termin summa on
$$na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 20 \cdot 5 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 3 = 670.$$

Aritmeettisen jonon summa - Esimerkki 2

Tien pituus on 50 km. Tien varteen asetetaan sähkötolppia 50 m välein. Ensimmäinen tolppa on pystytetty tien alkuun ja loput 1000 tolppaa on kasattu sen viereen, mistä kuorma-auto vie niitä paikoilleen, 20 tolppaa yhdessä kuormassa. Kuinka pitkän matkan kuorma-auto joutuu kulkemaan ennen kuin kaikki tolpat ovat paikoillaan?

Ratkaisu

Pystyttäessään 20 tolppaa 50 metrin välein kuorma-auto kulkee kilometrin matkan. Ensimmäisellä edestakaisella matkalla auto kulkee siis kaksi kilometriä. Seuraavalla matkalla auton on ensin ajettava kilometri päästäkseen tolpattoman osuuden alkuun, pystytettävä sitten mukana olevat 20 tolppaa ja palattava lopuksi takaisin. Voidaan ajatella, että auto kulkee edestakaisin tuon kilometrin matkan ja tekee sitten ensimmäistä matkaa vastaavan matkan. Matkaa kertyy toisella kertaa siis $2 + 2 = 4$ kilometriä. Kolmas matka on vastaavalla tavalla $4 + 2 = 6$ kilometriä. Viimeisen, eli 50. matkan pituus on kaksi kertaa koko tien pituus eli 100 km. Kuljetusmatkojen pituudet muodostavat aritmeettisen jonon $(2k)_{k=1}^{50}$. Jonon termien summaksi saadaan

$$50 \cdot \frac{2 + 100}{2} = 2550.$$

Kuorma-auto joutuu siis kulkemaan 2550 km ennen kuin urakka on valmis.

Greenin-Taon lause

Matemaatikot Ben Green ja Terence Tao todistivat vuonna 2004 vanhan konjektuurin alkulukujen aritmeettisista jonoista:

Lause

Alkuluvut sisältävät mielivaltaisen pitkiä aritmeettisia jonoja.

Olipa siis n mikä hyvänsä luonnollinen luku, niin löytyy n:n alkuluvun jono, jonka peräkkäiset termit ovat vakioetäisyydellä d toisistaan. Esim.
$n = 3$: $(3, 5, 7)$, $(d = 2)$
$n = 4$: $(5, 17, 29, 41)$, $(d = 12)$
$n = 5$: $(5, 11, 17, 23, 29)$, $(d = 6)$
Onnistutko löytämään lisää samanpituisia tai pidempiä jonoja?

Geometrinen jono

Geometrisessa jonossa kahden peräkkäisen termin suhde on vakio, ts. $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on geometrinen, jos on olemassa sellainen $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, että $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ kaikilla $k \geq 1$. Geometrisen jonon, jonka peräkkäisten termien suhde on r, k:s termi $a_k = a_1 r^{k-1}$. Niinpä geometrinen jono on aina muotoa $(a, ar, ar^2, \ldots)$, missä $a \neq 0$ ja $r \neq 0$

Esimerkki.

- $a_k = (\frac{1}{2})^{k-1}$, $(a_k)_{k=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)$ on geometrinen.
- $a_k = 2 \cdot 3^{k-1}$, $(a_k)_{k=1}^{4} = (2, 6, 18, 54)$ on geometrinen.

Pankkitili

Pankkitilillä oli vuonna 2001 a euroa. Joka vuodenvaihteessa tilille lisätään korko, joka on 3% tilin saldosta. Vuonna 2002 tilillä on

$$a + \frac{3}{100}a = \frac{103}{100}a \quad \text{euroa,}$$

vuonna 2003 siellä on

$$\frac{103}{100}a + \frac{3}{100}\Big(\frac{103}{100}a\Big) = \frac{103}{100}a\Big(1 + \frac{3}{100}\Big) = \Big(\frac{103}{100}\Big)^2 a \quad \text{euroa.}$$

Merkitään s_k:lla tilin saldoa vuonna $2000 + k$. Saamme geometrisen jonon $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$, jonka ensimmäinen termi on a ja peräkkäisten termien suhde on $\frac{103}{100}$, ts.

$$s_k = \Big(\frac{103}{100}\Big)^{k-1} a$$

kaikilla $k \geq 1$ eli $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ on geometrinen.

Geometrisen jonon summa

Geometrisen jonon $(a_k)_{k=1}^n = (a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1})$, $r \neq 1$, summa saadaan kaavasta

$$\sum_{k=1}^n a_k = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Tämä nähdään kertomalla summaa $1-r$:llä ja huomioimalla kumoutuminen:

$$(1-r)\sum_{k=1}^n a_k = (a+ar+\cdots+ar^{n-1})-(ar+ar^2+\cdots+ar^n) = a-ar^n = a(1$$

$$\iff \sum_{k=1}^n a_k = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

Geometrisen jonon summa - Esimerkki

- $a = 1, r = \frac{1}{2}$, $(a_k)_{k=1}^5 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)_{k=1}^5 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16})$

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{16}$$

Akilleus ja kilpikonna I

Antiikin aikaisen paradoksin mukaan Akilleus ei voi kilpajuoksussa saavuttaa kilpikonnaa, jos kilpikonnalle annetaan etumatkaa. Oletetaan vaikkapa että etumatka on 100 metriä. Akilleus juoksee 20 metriä sekunnissa ja kilpikonna "juoksee" kaksi senttimetriä sekunnissa. Akilleus juoksee etumatkan kiinni viidessä sekunnissa, mutta tänä aikana kilpikonna on edennyt kymmenen senttimetriä. Akilleus juoksee 10 cm matkan $\frac{5}{1000}$ sekunnissa, mutta silloin kilpikonna on edennyt $\frac{1}{10}$ millimetriä. Eli alkaa näyttää siltä, että aina kun Akilleus pääsee sinne, missä kilpikonna oli, niin kilpikonna onkin jo ehtinyt kauemmaksi. Eikö Akilleus siis koskaan saavuta kilpikonnaa?

Tasaisen nopeuden kaavasta "matka $=$ aika $\times$ nopeus", saamme yhtälön sille ajanhetkelle t, jolloin Akilleus saavuttaa kilpikonnan:

$$100 + \frac{2}{100} \cdot t = 20 \cdot t.$$

Akilleus ja kilpikonna II

Yhtälön ratkaisu on $t = \frac{5000}{999} \approx 5,005$ eli "todellisuudessa" Akilleus saavuttaa kilpikonnan noin $5 + \frac{1}{200}$ sekunnin päästä. Paradoksin kuvailussa tuo aika pilkotaan yhä pieneneviin osiin, jolloin rupeaa näyttämään, ettei Akilleus milloinkaan saa kilpikonnaa kiinni.

Tarkastellaan asiaa seuraavasti: Merkitään a_1:llä aikaa, joka Akilleukselta menee etumatkan kiinniottamiseen, a_2:lla aikaa, joka Akilleukselta menee kilpikonnan ajassa a_1 kulkeman matkan suorittamiseen, a_3:lla aikaa, joka Akilleukselta kuluu kilpikonnan ajassa a_2 kulkeman matkan suorittamiseen, jne.

Koska kilpikonna kulkee ajassa a matkan $a \cdot \frac{2}{100}$ metriä ja Akilleus juoksee tuon matkan $(a \cdot \frac{2}{100})/20 = \frac{a}{1000}$ sekunnissa, niin on voimassa

$$a_1 = 5 \quad \text{sekuntia ja} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1000} \quad \text{jokaisella } n = 1, 2, \ldots$$

Akilleus ja kilpikonna III

Täten paradoksissa tarkastellut aikavälit muodostavat geometrisen jonon, jonka ensimmäinen termi on 5 ja jossa peräkkäisten termien suhde on $\frac{1}{1000}$. Geometrisen summan kaavan nojalla on voimassa

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= 5 \cdot \frac{1-(\frac{1}{1000})^n}{1-\frac{1}{1000}} = 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{1000^n}\right) \cdot \frac{1000}{999} \\ &= \frac{5000}{999} - \frac{5}{999 \cdot 10^{n-1}} \end{aligned}$$

Tästä näemme, että aika on paradoksissa pilkottu osiin, joiden yhteenlaskettu kesto ei milloinkaan ylitä $\frac{5000}{999}$ sekuntia, eli sitä aikaa, joka Akilleukselta kului kilpikonnan kiinnisaamiseen. Oikea johtopäätös ei siis ole, ettei Akilleus saavuta "koskaan" kilpikonnaa, vaan ettei Akilleus saavuta kilpikonnaa "koskaan ennen kuin $\frac{5000}{999}$ sekunnin päästä".