Matematiikka tutuksi -kurssi

joukot

Avoin yliopisto & Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto
Kesä 2015

Juulia Lahdenperä

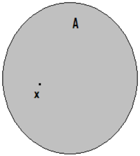
Georg Cantor (1845-1918)

Matematiikassa on pyrkimys määritellä monimutkaiset asiat täsmällisesti yksinkertaisempien asioiden avulla. Tätä varten tarvitaan jokin lähtökohta, yleensä muutama yleisesti hyväksytty ja ymmärretty käsite, joista sitten rakennetaan muut käsitteet. Tarkastellaan seuraavaksi Georg Cantorin 1900-luvun taitteessa luomaa naiivia joukko-oppia.

Joukkojen peruskäsitteet

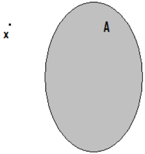
Joukko on kokoelma olioita eli joukon **alkioita**. Jokaisen olion kohdalla on osattava sanoa, onko olio joukon alkio, eli päteekö relaatio **"alkio kuuluu joukkoon"**. Olkoon A joukko ja x jokin olio.

Tapaus 1: Olio x on joukon A alkio.



$x \in A$ "alkio x kuuluu joukkoon A"

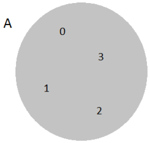
Tapaus 2: Olio x ei ole joukon A alkio.



$x \notin A$ "alkio x ei kuulu joukkoon A"

Joukkojen merkinnöistä

Joukkoja voidaan merkitä eri tavoilla. Esimerkiksi joukkoa A, joka sisältää luvut $0, 1, 2$ ja 3 voidaan merkitä **luettelemalla** sen kaikki alkiot:



Joukko $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

Toinen tapa merkitä kyseistä joukkoa on **antaa ehto**, jonka toteuttaa ainoastaan kaikki joukon alkiot. Merkintätavassa annetaan yleensä ensin jokin suurempi lukujoukko, jota sitten rajataan tarkemmalla ehdolla. Joukon A tapauksessa kaikki joukon alkiot ovat luonnollisia lukuja. Sen lisäksi kaikki alkiot ovat pienempiä kuin luku 4. Siispä

$$\begin{aligned} A &= \{\text{kaikki luonnolliset luvut} \mid \text{ehto: kaikki lukua } 4 \text{ pienemmät luvut}\} \\ &= \{a \in \mathbb{N} \mid a < 4\}. \end{aligned}$$

Joukkojen merkinnöistä

Joukossa jokainen alkio esiintyy vain kerran. Näin ollen esimerkiksi

$$\{a, b, a, a\} = \{a, b\}.$$

Lisäksi alkioiden järjestyksellä ei ole väliä, joten $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Joukkoa, jossa ei ole yhtään alkiota, kutsutaan **tyhjäksi joukoksi**. Sitä merkitään joko $\{\}$ tai $\emptyset$. Tyhjän joukon käsitettä voi lähestyä ämpärianalogian kautta: jos joukko $\{0, 1\}$ on ämpäri, jossa on luvut 0 ja 1, niin joukko $\emptyset$ on tällöin pelkkä tyhjä ämpäri.

Samat joukot

Joukot A ja B ovat samat, jos niissä on täsmälleen samat alkiot, eli $x \in A$, jos ja vain jos $x \in B$. Tällöin merkitään $A = B$. Joukot A ja B voidaan osoittaa samoiksi näyttämällä, että kaikki joukon A alkiot ovat myös joukossa B, ja että kaikki joukon B alkiot ovat myös joukossa A.

Lukujoukot

Tarkastellaan seuraavaksi jo tuttuja lukujoukkoja. Niitä merkitään joukkomerkintöjen avulla seuraavasti:

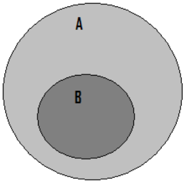
- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (engl. *natural numbers*)
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (saks. *Zahlen*)
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ (engl. *quotient* = osamäärä)
- Reaaliluvut $\mathbb{R}$ (engl. *real numbers*)

Positiivisista (vastaavasti negatiivisista) kokonaisluvuista käytetään usein merkintää $\mathbb{Z}_+$ (vast. $\mathbb{Z}_-$), ts.

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{ja} \quad \mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, \ldots\}.$$

Osajoukot

Joukko B on joukon A **osajoukko**, jos jokainen joukon B alkio on myös joukon A alkio. Toisin sanoen ehdosta $x \in B$ seuraa, että $x \in A$. Tällöin merkitään $B \subset A$ (joskus myös $B \subseteq A$).



Esimerkiksi

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, sillä kaikki luonnolliset luvut ovat kokonaislukuja, kaikki kokonaisluvut rationaalilukuja ja kaikki rationaaliluvut reaalilukuja.
- Olkoot $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{1, 4\}$. Tällöin $A \not\subset B$, koska joukon A alkio 3 ei ole joukon B alkio. Vastaavasti $B \not\subset A$, koska $4 \in B$ mutta $4 \notin A$.
- Tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko, eli $\emptyset \subset A$ mielivaltaisella joukolla A. Tämä johtuu siitä, että tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkiota, joka ei kuuluisi joukkoon A.

Huomaa, että $A = B$, jos ja vain jos $A \subset B$ ja $B \subset A$.

Reaalilukuvälit

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. Merkitään reaalilukuvälejä

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

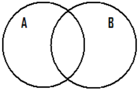
Esimerkiksi $]-3, \pi] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq \pi\}$ ja väli $[0, 3]$ on välin $]-3, \pi]$ osajoukko, sillä $\pi > 3$.

Rajoittamattomia reaalilukuvälejä merkitään vastaavasti:

- $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

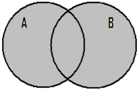
Joukko-operaatiot

Olkoot A ja B joukkoja.

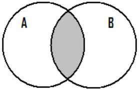


Määritellään joukkojen

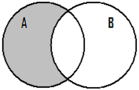
yhdiste $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$



leikkaus $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$



erotus $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\}$



Esimerkki joukko-operaatioiden käytöstä

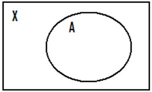
Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{3, 4, 5\}$. Nyt

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A \cap B = \{3\}$
- $A \setminus B = \{1, 2\}$

Huomaa, että joukko-operaatioita voidaan tehdä myös useammille joukoille.

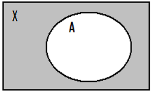
Komplementti

Olkoon X jokin *perusjoukko* ja $A \subset X$.



Määritellään joukon A

komplementti $A^{\complement} = \{x \in X \mid x \notin A\}$



Esimerkki joukko-operaatioiden käytöstä

Olkoon $X = \mathbb{R}$ perusjoukko ja olkoot $A = \,]-1, 1[$ ja $B = [1, 2[$. Nyt

- $A \cup B = \,]-1, 2[$
- $A \cap B = \emptyset$
- $A^{\complement} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ tai } x \geq 1\} = \,]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

Huomio. Joukkoa A voidaan merkitä toisella tapaa muistamalla reaaliluvun x **itseisarvo**

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Huomaa, että $|x| \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Nyt joukkoa A voidaan merkitä

$$A = \,]-1, 1[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\},$$

ja toisaalta

$$A^{\complement} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}.$$

Joukot alkioina

Usein joukoissa on alkioina toisia joukkoja. **On tärkeää oppia erottamaan alkion ja sen muodostaman joukon ero, samoin kuin relaatioiden $\in$ ("kuuluu") ja $\subset$ ("sisältyy") välinen ero.**

- Joukossa $A = \{10, 20, \{30\}\}$ on kolme alkioita $10, 20$ ja $\{30\}$.
- Joukossa $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ on kolme alkiota $1, 2$ ja $\{1, 2\}$. Huomaa, että tässä tapauksessa joukko $\{1, 2\} \in B$, jonka lisäksi joukolla B on osajoukko $\{1, 2\}$ (eli $\{1, 2\} \subset B$).
- Joukossa $C = \{1, \{1, 2\}\}$ on kaksi alkiota 1 ja $\{1, 2\}$. Huomaa, että $2 \notin C$, sillä 2 ei ole joukon C alkio.
- Joukossa $\{\emptyset\}$ on yksi alkio, tyhjä joukko $\emptyset$. Näin ollen $\{\emptyset\} \neq \emptyset$, sillä tyhjässä joukossa ei ole yhtään alkiota.

Potenssijoukot

Joukon A **potenssijoukko** on kaikkien joukon A osajoukkojen muodostama joukko. Joukon A potenssijoukkoa merkitään $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$.

Esimerkki: Joukon $\{1, 2, 3\}$ potenssijoukko on

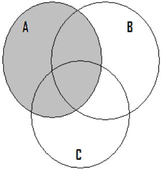
$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Huomaa, että kaikilla epätyhjillä joukoilla A on ainakin kaksi osajoukkoa: tyhjä joukko $\emptyset$ ja joukko itse.

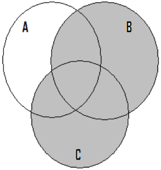
Jos joukossa on n alkiota, niin sen potenssijoukossa on 2^n alkiota. Kuinka tämä voidaan todistaa?

Osittelulaki

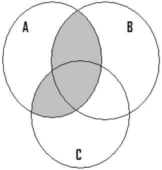
Olkoot A, B ja C joukkoja. Tarkastellaan osittelulakia $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ensin Venn-diagrammien avulla:



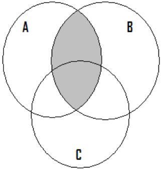
A



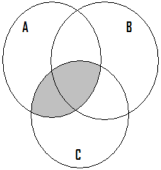
$B \cup C$



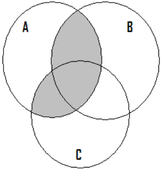
$A \cap (B \cup C)$



$A \cap B$



$A \cap C$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Osittelulain todistus I

Todistetaan yhtälö $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ osoittamalla joukot toistensa osajoukoiksi.

1. $\boxed{A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C):}$
   Olkoon x jokin joukon $A \cap (B \cup C)$ alkio. Tällöin leikkauksen määritelmän mukaan $x \in A$ ja $x \in B \cup C$, josta edelleen yhdisteen määritelmän mukaan $x \in B$ tai $x \in C$. Näin ollen $x \in A$ ja $x \in B$ tai $x \in A$ ja $x \in C$, eli $x \in A \cap B$ tai $x \in A \cap C$. Siispä $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Koska mielivaltainen joukon $A \cap (B \cup C)$ alkio x on myös joukon $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ alkio, niin
   $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

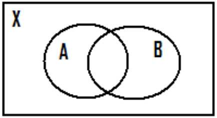
Osittelulain todistus II

2. $\boxed{(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C):}$
   Olkoon x jokin joukon $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ alkio. Tällöin yhdisteen määritelmän mukaan $x \in A \cap B$ tai $x \in A \cap C$. Jos $x \in A \cap B$, niin $x \in A$ ja $x \in B \subset B \cup C$, eli $x \in A \cap (B \cup C)$. Jos $x \in A \cap C$, niin $x \in A$ ja $x \in C \subset B \cup C$, eli $x \in A \cap (B \cup C)$. Siis molemmissa tapauksissa $x \in A \cap (B \cup C)$. Koska mielivaltainen joukon $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ alkio on myös joukon $x \in A \cap (B \cup C)$ alkio, niin $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

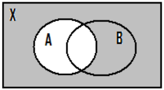
Näin ollen, koska $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ja $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$, niin $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

De Morganin laki

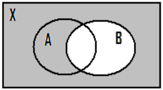
Olkoot A ja B perusjoukon X osajoukkoja.



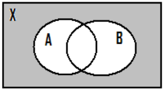
Tarkastellaan De Morganin lakia $(A \cup B)^{\mathsf{C}} = A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}$:



A^{C}



B^{C}



$A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}$

De Morganin lain todistus

Todistetaan De Morganin laki $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$:

Olkoon $x \in X$. Nyt $x \in (A \cup B)^{\complement}$

$$\begin{aligned} &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff x \notin A \text{ ja } x \notin B \\ &\iff x \in A^{\complement} \text{ ja } x \in B^{\complement} \\ &\iff x \in A^{\complement} \cap B^{\complement} \end{aligned}$$

Siis $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$.

Russellin paradoksi

Yllä esitettyä joukko-oppia sanotaan naiiviksi, koska sen intuitiivinen ja määrittelemätön joukkokäsite johtaa paradoksiin. Filosofi Bertrand Russell esitti vuonna 1901 esimerkin:

Olkoon R kaikkien niiden joukkojen joukko, jotka eivät sisällä itseään alkionaan eli $R = \{A \mid A \notin A\}$. Onko joukko R itsensä alkio eli onko väite $R \in R$ tosi? Jos $R \in R$ eli R sisältää itsensä alkionaan, niin R ei toteuta määritelmän ehtoa, jolloin $R \notin R$. Jos taas $R \notin R$ eli R ei sisällä itseään alkionaan, niin se toteuttaa määritelmän ehdon, jolloin $R \in R$. Molemmat vaihdoehdot johtavat siis ristiriitaan.

Joukkojen muodostaminen ei olekaan niin vapaata kuin aluksi annettiin ymmärtää. Tästä syystä tarvitaan aksiomaattinen lähestymistapa joukko-oppiin, joka korjaa nämä naiivin joukko-opin ongelmat.