Matematiikka tutuksi -kurssi

yhtälöt

Avoin yliopisto & Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto
Kesä 2015

Juulia Lahdenperä

Potenssimerkintä

Kun samaa lukua kerrotaan toistuvasti itsellään, voidaan tarvittaessa käyttää lyhyempää **potenssimerkintää**. Olkoon n jokin positiivinen kokonaisluku. Reaaliluvulle x käytetään potenssimerkintää

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ kappaletta}}.$$

Lisäksi, jos $x \neq 0$, niin

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

On myös sovittu, että $x^0 = 1$ kaikilla $x \neq 0$.

Esimerkki

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$
$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$
$8^0 = 1$

Neliöjuuri

Jokaisella reaaliluvulla $y \geq 0$ on olemassa n**:s juuri** eli sellainen reaaliluku $x \geq 0$, jolle pätee

$$x^n = y.$$

Kyseistä lukua merkitään $x = \sqrt[n]{y}$. Tapauksessa $n = 2$ puhutaan **neliöjuuresta**, jota merkitään $x = \sqrt{y}$.

Esimerkki

$\sqrt[3]{27} = 3$, koska $3^3 = 27$
$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, koska $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Reaalilukujen kunta-aksioomat

Millä tahansa reaaliluvuilla a, b ja c pätee seuraavat ominaisuudet:

- $a + b = b + a$ ja $ab = ba$ (**vaihdannaisuus**)
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ ja $a(bc) = (ab)c$ (**liitännäisyys**)
- $a(b + c) = ab + ac$ (**osittelulaki**)
- Kaikilla reaaliluvuilla a on **vastaluku** $-a$, jolle pätee $a + (-a) = 0$
- Kaikilla nollasta poikkeavilla reaaliluvuilla a on **käänteisluku** $1/a$, jolle pätee $a \cdot 1/a = 1$
  (Huomaa, että luvulla nolla ei ole käänteislukua.)
- On olemassa sellainen reaaliluku 1, että $1 \cdot a = a$ kaikilla reaaliluvuilla a (**ykkösalkio**)
- On olemassa sellainen reaaliluku 0, että $0 + a = a$ kaikilla reaaliluvuilla a (**nolla-alkio**)

Kaikki reaalilukujen ominaisuudet voidaan johtaa näistä aksioomista.

Yhtälöiden ominaisuuksia

Millä tahansa reaaliluvuilla a, b ja c pätee seuraavat ominaisuudet:

- $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
- $a = b \Leftrightarrow a - c = b - c$
- $a = b \Rightarrow c \cdot a = c \cdot b$
- $a = b \Leftrightarrow c \cdot a = c \cdot b$, mikäli $c \neq 0$
- $a = b \Leftrightarrow a/c = b/c$, mikäli $c \neq 0$
- $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ tai $b = 0$ (**tulon nollasääntö**)

Ensimmäisen asteen yhtälö

Yhtälöä, joka on muotoa (tai voidaan saattaa muotoon) $ax + b = 0$, missä a ja b ovat reaalilukuja, sanotaan **ensimmäisen asteen yhtälöksi**.

- Jos $a \neq 0$, niin yhtälöllä on varmasti ratkaisu. Tämä löydetään vähentämällä yhtälön molemmilta puololta luku b ja jakamalla luvulla a:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}.$$

- Jos $a = 0$, niin yhtälö saa muodon $b = 0$. Tällöin yhtälö toteutuu
  - kaikilla muuttujan x arvoilla, jos $b = 0$
  - ei millään muuttujan x arvolla, jos $b \neq 0$.

Ensimmäisen asteen yhtälö

Esimerkki

Millä muuttujan x arvoilla yhtälö $8x + 17 = 4x - 7$ on tosi?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} 8x + 17 = 4x - 7 &\Rightarrow 8x + 17 - 4x = 4x - 7 - 4x \\ &\Rightarrow 4x + 17 = -7 \\ &\Rightarrow 4x + 17 - 17 = -7 - 17 \\ &\Rightarrow 4x = -24 \\ &\Rightarrow x = \frac{-24}{4} = -6. \end{aligned}$$

Jos yhtälöllä on ratkaisu, niin se on $x = -6$. Tarkistetaan asia vielä sijoittamalla. Yhtälön vasen puoli tulee muotoon $8 \cdot (-6) + 17 = -31$ ja oikea puoli muotoon $4 \cdot (-6) - 7 = -31$. Näin ollen yhtälöllä on ratkaisu, ja se on $x = -6$. (Voidaan myös sanoa, että yhtälö on tosi jos ja vain jos $x = -6$.)

Ensimmäisen asteen yhtälö

Esimerkki

Millä muuttujan x arvoilla yhtälö

$$2x + 1 = \frac{8x - 4}{4}$$

on tosi?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} 2x + 1 = \frac{8x - 4}{4} &\Rightarrow 4(2x + 1) = 8x - 4 \\ &\Rightarrow 8x + 4 = 8x - 4 \\ &\Rightarrow 8x + 4 - 8x = 8x - 4 - 8x \\ &\Rightarrow 4 = -4. \end{aligned}$$

Näin ollen yhtälö ratkeaa vain, jos $4 = -4$. Tämä johtaa ristiriitaan, sillä $4 \neq -4$. Siispä alkuperäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Ensimmäisen asteen yhtälö

Esimerkki

Raimo osti luomumyymälästä yhteensä 740 grammaa ylihinnoiteltuja luomupähkinöitä ja -taateleita. Pähkinät maksoivat 22 €/kg ja taatelit 28 €/kg. Raimo maksoi ostoksistaan yhteensä $17,54$ €. Kuinka paljon taateleita Raimo osti?

Ratkaisu. Merkitään Raimon ostamien taateleiden määrää muuttujalla x. Tällöin Raimo osti pähkinöitä $0,740 - x$ kg. Nyt ostosten kokonaishinnasta saadaan yhtälö

$$28 \text{ €} \cdot x + 22 \text{ €} \cdot (0,740 - x) = 17,54 \text{ €}.$$

Yhtälö sievenee muotoon

$$6x - 1,26 = 0,$$

josta saadaan ratkaistua

$$x = \frac{1,26}{6} = 0,210 \text{ g}.$$

Raimo osti taateita siis 210 grammaa.

Ensimmäisen asteen yhtälö

Esimerkki

Taateleiden ja pähkinöiden lisäksi Raimo osti kuivattuja mansikoita, joista hän antoi kaksi viidesosaa vaimolleen, kuudesosan pojalleen ja jäljelle jääneistä 6 hän syötti naapurin koiralle. Raimo harmistui, sillä hänelle jäi itselleen vain 7 mansikkaa. Kuinka monta mansikoita alunperin oli?

Ratkaisu. Merkitään mansikoiden kokonaismäärää muuttujalla x. Näin ollen Raimo antoi vaimolleen $2/5x$ ja pojalleen $1/6x$ mansikkaa. Vähennetään mansikoiden kokonaismäärästä kaikki muille annetut mansikat, jolloin jäljelle jää Raimon seitsemän mansikkaa:

$$x - \frac{2}{5}x - \frac{1}{6}x - 6 = 7.$$

Yhtälö sievenee muotoon

$$\frac{13}{30}x - 13 = 0,$$

joka toteutuu, kun $x = 30$. Mansikoita oli siis alunperin 30 kappaletta.

Muistikaavoja

Seuraavat kaavat on hyvä pitää mielessä mm. korkeampiasteisia yhtälöitä ratkottaessa.

Olkoot a ja b reaalilukuja. Tällöin

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Toisen asteen yhtälö I

Yhtälöä, joka on muotoa (tai voidaan saattaa muotoon) $ax^2 + bx + c = 0$, missä a, b ja c ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$, sanotaan **toisen asteen yhtälöksi**. Toisen asteen yhtälön mahdolliset ratkaisut saadaan kaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ratkaisujen lukumäärä riippuu neliöjuuren sisällä olevasta lausekkeesta, yhtälön **diskriminantista** $D = b^2 - 4ac$:

- Jos $D < 0$, niin yhtälöllä ei ole (reaalisia) ratkaisuja
- Jos $D = 0$, niin yhtälöllä on yksi ratkaisu, ja sen on

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Toisen asteen yhtälö II

- Jos $D > 0$, niin yhtälöllä on kaksi ratkaisua, jotka ovat

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ja

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Toisen asteen yhtälö I

Esimerkki

Etsi yhtälön $x^2 + x + 1 = 0$ kaikki ratkaisut.

Ratkaisu. Tarkastellaan yhtälön diskriminanttia:
$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Yhtälöllä ei siis ole yhtään ratkaisua.

Esimerkki

Etsi yhtälön $x^2 - 2x + 1 = 0$ kaikki ratkaisut.

Ratkaisu. Tarkastellaan yhtälön diskriminanttia:
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$. Yhtälöllä on siis yksi ratkaisu, joka on

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1.$$

Toisen asteen yhtälö II

Esimerkki

Etsi yhtälön $x^2 - x - 2 = 0$ kaikki ratkaisut.

Ratkaisu. Tarkastellaan yhtälön diskriminanttia:
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 9 = 10 > 0$. Yhtälöllä on siis kaksi ratkaisua, jotka ovat

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \text{ tai } x = -1.$$

Toisen asteen yhtälö

Esimerkki

Onko toisen asteen yhtälöllä $2x^2 - 8x + 6 = 0$ ratkaisuja? Jos on, niin mitkä ne ovat?

Ratkaisu. Tarkastellaan yhtälön diskriminanttia. Koska $a = 2, b = -8$ ja $c = 6$, niin yhtälön diskrinimantti D on

$$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16 > 0.$$

Koska diskriminantti $D > 0$, niin yhtälöllä on kaksi ratkaisua, jotka ovat

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm 4}{4} \Leftrightarrow x = 3 \text{ tai } x = 1.$$

Toisen asteen yhtälö

Esimerkki

Maanviljelijä rakentaa lampaalleen suorakulmion muotoisen 15 neliömetrin aitauksen, jonka pidempi sivu on 2 metriä pidempi kuin lyhyempi sivu. Montako metriä aitaa hän tarvitsee?

Ratkaisu. Merkitään aitauksen lyhyemmän sivun pituutta muuttujalla x (metriä). Tällöin aitauksen pidemmän sivun pituus on $x+2$ metriä. Koko aitauksen pinta-alan yhtälöksi saadaan siis

$$x(x+2)=15.$$

Sievennetään yhtälöä, jolloin se tulee muotoon

$$x^2+2x-15=0.$$

Tarkastellaan yhtälön diskriminanttia:
$D=2^2-4\cdot 1\cdot(-15)=4+60=64>0$. Yhtälöllä on siis kaksi ratkaisua, jotka ovat

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 8}{2}\Leftrightarrow x=3 \text{ tai } x=-5.$$

Pituus ei kuitenkaan voi olla negatiivista, joten oikeaksi vastaukseksi jää $x=3$ metriä. Kokonaisuudessaan aitaa tarvitaan kahteen lyhyempään ja kahteen pidempään sivuun
$2x+2(x+2)=2\cdot 3+2(3+2)=16$ metriä.

Matematiikka tutuksi -kurssi

Joukot ja funktiot

Avoin yliopisto & Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto
Kesä 2015

Juulia Lahdenperä

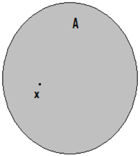
Georg Cantor (1845-1918)

Matematiikassa on pyrkimys määritellä monimutkaiset asiat täsmällisesti yksinkertaisempien asioiden avulla. Tätä varten tarvitaan jokin lähtökohta, yleensä muutama yleisesti hyväksytty ja ymmärretty käsite, joista sitten rakennetaan muut käsitteet. Tarkastellaan seuraavaksi Georg Cantorin 1900-luvun taitteessa luomaa naiivia joukko-oppia.

Joukkojen peruskäsitteet

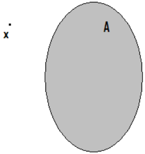
Joukko on kokoelma olioita eli joukon **alkioita**. Jokaisen olion kohdalla on osattava sanoa, onko olio joukon alkio, eli päteekö relaatio **"alkio kuuluu joukkoon"**. Olkoon A joukko ja x jokin olio.

Tapaus 1: Olio x on joukon A alkio.



$x \in A$ "alkio x kuuluu joukkoon A"

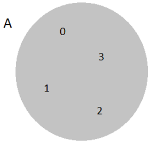
Tapaus 2: Olio x ei ole joukon A alkio.



$x \notin A$ "alkio x ei kuulu joukkoon A"

Joukkojen merkinnöistä

Joukkoja voidaan merkitä eri tavoilla. Esimerkiksi joukkoa A, joka sisältää luvut $0, 1, 2$ ja 3 voidaan merkitä luettelemalla sen kaikki alkiot:



Joukko $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

Toinen tapa merkitä kyseistä joukkoa on antaa ehto, jonka toteuttaa ainoastaan kaikki joukon alkiot. Merkintätavassa annetaan yleensä ensin jokin suurempi lukujoukko, jota sitten rajataan tarkemmalla ehdolla. Joukon A tapauksessa kaikki joukon alkiot ovat luonnollisia lukuja. Sen lisäksi kaikki alkiot ovat pienempiä kuin luku 4. Siispä

$$A = \{\text{kaikki luonnolliset luvut} \mid \text{ehto: kaikki lukua } 4 \text{ pienemmät luvut}\}$$
$$= \{a \in \mathbb{N} \mid a < 4\}.$$