Matematiikka tutuksi -kurssi

Eksponentti- ja logaritmifunktiot

Avoin yliopisto & Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto
Kesä 2015

Juulia Lahdenperä

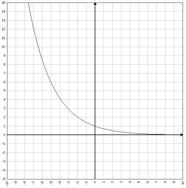
Eksponentti- ja logaritmifunktiot

Eksponentti- ja logaritmifunktiot liittyvät läheisesti toisiinsa. Käytännössä eksponenttifunktioissa muuttuja x on jonkin kantaluvun potenssi. Eksponenttifunktio tulee vastaan ilmiöissä, joissa tarkasteltava suure kasvaa tai vähenee suhteessa senhetkiseen arvoonsa. Niinpä esimerkiksi eksponentiaalinen kasvaminen on hyvin nopeaa. Logaritmifunktio on tietyssä mielessä eksponenttifunktion *käänteisfunktio*. Sitä käytetään potensissa olevan muuttujan x selvittämiseen.

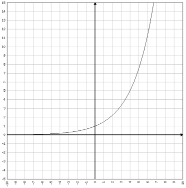
Eksponenttifunktio

Määritellään kantaluvulle $a > 0$ **eksponenttifunktio**

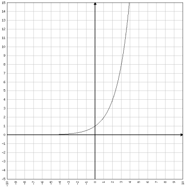
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x.$$



$a = 0.7$



$a = 1.5$



$a = 2$

Esimerkki I

Tiedetään, että valon voimakkuus vähenee 30% sen kulkiessa annetun muovilevyn läpi. Paljonko voimakkuus vähenee, jos valo kulkee kolmen samanlaisen peräkkäin asetetun levyn läpi?

Ratkaisu. Ensimmäisen levyn läpäistyään valon voimakkuus on vehentynyt 30 %, eli alkuperäisestä voimakkuudesta on jäljellä 70%. Läpäistessää toisen levyn, voimakkuus heikkenee vielä 30%, joten toisen levyn jälkeen alkuperäisestä valon voimakkuudesta on jäljellä $0,7 \cdot 0,7 = 0,49$, eli 49%. Kolmannen levyn läpäistessään valon voimakkuus heikkenee taas 30%, joten lopulta voimakkuudesta on jäljellä $0,49 \cdot 0,7 = 0,343$, eli $34,3\%$.

Eksponenttifunktion avulla jäljellä olevan valon voimakkuus voidaan ilmaista kaavalla $f(n) = 0,7^n$, missä n on valon läpäisemien muovilevyjen lukumäärä. Kolmen läpäistyn muovilevyn tapauksessa $f(3) = 0,7^3 = 0,343$ eli 34,3 %.

Esimerkki

Valon voimakkuus vähenee 30% sen kulkiessa 1 cm paksuisen muovilevyn läpi. Paljonko voimakkuus vähenisi, jos levyn paksuus olisi

(a) 3 mm

(b) $5,4$ cm?

Ratkaisu. Eksponenttifunktio $f(x) = 0,7^x$ kuvaa valon voimakkuuden osuutta alkuperäisestä sen läpäistyä x cm paksuinen muovilevy. Siispä

(a) $f(0,3) = 0,7^{0,3} \approx 0,90$, eli valon voimakkuus vähenisi noin 10%.

(b) $f(5,4) = 0,7^{5,4} \approx 0,15$, eli valon voimakkuus vähenisi noin 85%.

Logaritmi

Olkoon *kantaluku* $a > 0$, $a \neq 1$. Positiivisen luvun $y \in \mathbb{R}$ a-kantainen **logaritmi** $\log_a y$ on luku $x \in \mathbb{R}$, jolle $a^x = y$. Siis

$$\log_a y = x \iff a^x = y.$$

Toisin sanoen $\log_a y$ on vastaus kysymykseen ”Mihin potenssiin a täytyy korottaa, jotta saadaan y?”.

Logaritmille on voimassa seuraavat **laskusäännöt**, kun $y, z > 0$ ja $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\begin{aligned} \log_a(yz) &= \log_a y + \log_a z \\ \log_a \frac{y}{z} &= \log_a y - \log_a z \\ \log_a(y^z) &= z \log_a y. \end{aligned}$$

Logaritmi

Esimerkkejä:

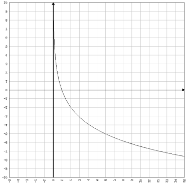
$\log_3 9 = 2$, sillä $3^2 = 9$.
$\log_{10} 1\ 000 = 3$, sillä $10^3 = 1\ 000$.

Huomaa myös, että $\log_a 1 = 0$, sillä $a^0 = 1$, ja $\log_a a = 1$, sillä $a^1 = a$ kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$.

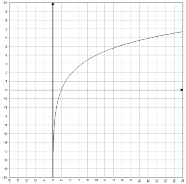
Logaritmifunktio

Määritellään kantaluvulle $a > 0$, $a \neq 1$, **logaritmifunktio**

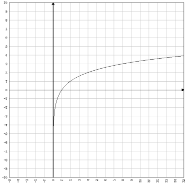
$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g(y) = \log_a y$$



$a = 0.7$



$a = 1.5$



$a = 2$

Esimerkkejä yhtälöistä I

Ratkaistaan seuraavat yhtälöt:

(a)

$$
\begin{aligned}
& 5^{x^2+2x-1} \cdot 25 = 1 \\
& \iff 5^{x^2+2x-1} \cdot 5^2 = 1 \\
& \iff 5^{x^2+2x+1} = 1 \\
& \iff x^2 + 2x + 1 = 0 \\
& \iff x = -1
\end{aligned}
$$

Esimerkkejä yhtälöistä II

(b)

$$
\begin{aligned}
&\log_a y^2 + \log_a 2y = \log_a 2 \\
&\iff 2\log_a y + \log_a 2 + \log_a y = \log_a 2 \\
&\iff 3\log_a y = 0 \\
&\iff \log_a y = 0 \\
&\iff y = 1
\end{aligned}
$$

Esimerkkejä yhtälöistä III

(c)

$$\begin{aligned}
&2^{2x+1} \cdot 5^{-x} = 3 \\
&\iff (2^2)^x \cdot 2 \cdot 5^{-x} = 3 \\
&\iff 4^x \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = 3 \\
&\iff \left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{3}{2} \\
&\iff x = \ln\frac{3}{2} / \ln\frac{4}{5} \\
&\iff x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 4 - \ln 5}
\end{aligned}$$

Esimerkkejä yhtälöistä IV

(d)

$$
\begin{aligned}
&3^{2x+1} = \frac{1}{9} \\
&\iff 2x + 1 = \log_3 \frac{1}{9} \\
&\iff 2x + 1 = -2 \\
&\iff x = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Neperin luku

Kantalukuna käytetään usein ns. Neperin lukua

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,72.$$

Kantaluvun e logaritmia sanotaan luonnolliseksi logaritmiksi, ja sitä merkitään $\log_e y = \ln y$.

John Napier (1550-1617)

Kantaluvun vaihto

Usein on hyödyllistä tarkastella ongelmaa eri kantaisissa logaritmeissa. Kantaluvun vaihto voidaan suorittaa seuraavan kaavan mukaan:

$$\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}.$$

Näin voidaan tehdä, sillä logaritmin määritelmän nojalla

$$y = a^{\log_a y}.$$

Ottamalla b-kantaiset logaritmin puolittain saadaan

$$\log_b y = \log_b a^{\log_a y} = (\log_a y)(\log_b a),$$

ja edelleen

$$\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}.$$

Esimerkki

Kuten aikaisemmassa esimerkissä, oletetaan, että valon voimakkuus vähenee 30% sen kulkiessa 1 cm paksuisen muovilevyn läpi. Kuinka paksu levyn tulisi olla, jotta se päästäisi valosta lävitseen 60 %?

Ratkaisu. Kuten aiemmin, eksponenttifunktio $f(x) = 0.7^x$ kuvaa valon voimakkuuden osuutta alkuperäisestä sen läpäistyä x cm paksuinen muovilevy. Saadaan siis yhtälö

$$f(x) = 0., \iff 0,7^x = 0,6 \iff x = \log_{0,7} 0,6 = \frac{\ln 0,6}{\ln 0,7} \approx 1,4.$$

Levyn on siis oltava noin $1,4$ cm paksu.

Radioaktiivisen aineen puoliintumisaika

Aikaa, jonka kuluessa radioaktiivisen aineen (esim. radon, uraani) atomiytimistä puolet on hajonnut toisiksi atomiytimiksi, sanotaan **puoliintumisajaksi**. Puoliintumisaika on kullekin aineelle ominainen vakio, ja puoliintumisajat vaihtelevatkin aineesta riippuen sekunnin murto-osista miljardeihin vuosiin. Esimerkiksi ydinenergian tuotannossa käytettävän uraanin isotooppi ^{235}U puoliintumisaika on noin 700 miljoonaa vuotta.

Merkitään radioaktiivisen aineen puoliintumisaikaa kirjaimella T ja aineen alkuperäistä määrää kirjaimella N_0. Tällöin ajan t kuluttua radioaktiivisen aineen määrä on

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$