Tervetuloa!

MATEMATIIKKA TUTUKSI -KURSSI

INTRO

Avoin yliopisto & Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto
Kesä 2015

Juulia Lahdenperä

Kurssin järjestelyistä

- Kurssi soveltuu osaksi matematiikan tai menetelmätieteiden sivuainekokonaisuutta
- Kurssia ei hyväksytä matematiikan pääaineopintoihin
- 5 op (hyväksytty/hylätty)
- Luennot Exactum B123
  - ti klo 16–18:30 (11.8. Ex. D123)
  - to klo 16–18:30 (6.8., 20.8. ja 27.8. Ex. CK112)
- Laskuharjoitukset Exactum CK111
  - Ryhmä 1: ke klo 16–17:30
  - Ryhmä 2: ke klo 18–19:30

Kalenteri

August							
Wk	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su
31						1	2
32	3	4	5	6	7	8	9
33	10	11	H1	13	14	15	16
34	17	18	H2	20	21	22	23
35	24	25	H3	27	28	29	30
36	31						

September							
Wk	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	
36		1	H4	3	4	5	6
37	7	8	H5	10	11	12	13
38	14	15	H6	17	18	19	20

Exactum B123

Exactum D123

Exactum CK112

Exactum CK111

Kurssin suorittaminen

Kurssi suoritetaan tekemällä laskuharjoitustehtäviä ja osallistumalla niiden läpikäyntiin laskuharjoitustilaisuuksissa.

- Laskuharjoituksia on yhteensä kuusi sarjaa, joissa on joka viikolle kuusi laskuharjoitustehtävää
- Kurssin suorittamiseksi tulee tehdä $2/3$ tehtävistä (eli 24 tehtävää)

Kurssin sisältö

- Yleiskatsaus matematiikan eri osa-alueisiin
- Tutustutaan yliopistomatematiikan merkintöihin ja käsitteisiin
- Harjoitellaan todistusmenetelmiä ja todistamista

Kurssin sisältö

ALUSTAVA LUENTO-OHJELMA:

- Luvut ja yhtälöt
- Joukot ja funktiot
- Alkuluvut ja jaollisuus
- Kryptografia
- Logiikka
- Induktio ja lukujonot

Lisämateriaalia

Kurssille osallistutaan hyvin moninaisilla taustoilla. Tarvittaessa voit etsiä lisätietoa mm. seuraavista lähteistä:

- Lukiokirjat
- `opetus.tv`
- Wikipedia
- ...

Kysymyksiä

Mitä matematiikka on?
Miten matematiikka eroaa koulumatematiikasta?

Rafael (1483-1520)

Matematiikka tutuksi -kurssi

lukujoukot ja -järjestelmät

Avoin yliopisto & Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto
Kesä 2015

Juulia Lahdenperä

Luonnolliset luvut $\mathbb{N}$

Luonnolliset luvut $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

- Merkitään $\mathbb{N}$
- Kuvataan lukumääriä
- Ovat järjestyksessä (esim. $1 < 2$, $254 < 1674$, $0 \leq n$ millä tahansa luonnollisella luvulla n)
- Ei ole suurinta luonnollista lukua
- Luonnollisten lukujen kerto- ja yhteenlaskuoperaatiot tuottavat luonnollisen luvun

Määritelmä

1. Luku 0 on luonnollinen luku
2. Jos luku n on luonnollinen luku, niin myös luku $n + 1$ on luonnollinen luku

POHDITTAVAKSI:
Mikä on aksiooma? Mitä tarkoitetaan aksiomaattisuudella?

Kokonaisluvut $\mathbb{Z}$

Kokonaisluvut $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

- Merkitään $\mathbb{Z}$
- Kuvataan lukumäärien eroja
- Ovat järjestyksessä (esim. $-8 < 2$, $254 < 1674$)
- Ei ole suurinta eikä pienintä kokonaislukua
- Kokonaislukujen kerto- ja yhteenlaskuoperaatiot tuottavat kokonaisluvun

Määritelmä

Kokonaislukuja ovat kaikki luvut, jotka voidaan ilmaista kahden luonnollisen luvun erotuksena, eli luvut, jotka ovat muotoa $m - n$ joillakin luonnollisilla luvuilla m ja n.

Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$

Rationaaliluvut ovat muotoa $\frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja ja $n \neq 0$.

- Merkitään $\mathbb{Q}$
- Kuvaavat "osia kokonaisista"
  (esim. puolikas $1/2$, viidesosa $1/5$, $\ldots$)
- Ovat järjestyksessä
  (esim. $1/2 < 5/3$)
- Kahden rationaaliluvun välissä on aina lisää rationaalilukuja
- Ei ole suurinta eikä pienintä rationaalilukua
- Rationaaliluvun esitys m/n ei ole yksikäsitteinen
  (esim. $1/2 = 4/8 = 100/200$)
- Rationaalilukujen desimaalikehitelmät ovat joko päättyviä tai jaksollisia
  (esim. $5/4 = 1,25$, $3/22 = 0,13636\ldots = 0,1\overline{36}$)

Määritelmä

Rationaalilukuja ovat kaikki luvut, jotka voidaan ilmaista kahden kokonaisluvun osamääränä, eli luvut, jotka ovat voidaan ilmaista muodossa m/n, missä m ja n ovat kokonaislukuja ja $n \neq 0$.

Rationaalilukujen summa

Lause

Kahden rationaaliluvun summa on rationaaliluku.

Todistus.

Olkoot luvut s ja t rationaalilukuja. Rationaalilukujen määritelmän perusteella tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa sellaiset kokonaisluvut a, b, c ja d, $b \neq 0$, $d \neq 0$, että

$$s = \frac{a}{b} \quad \text{ja} \quad t = \frac{c}{d}.$$

Tutkitaan sitten rationaalilukujen s ja t summaa. Huomataan, että

$$s + t = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad + cb}{bd}.$$

Koska luvut a ja d ovat kokonaislukuja, niin myös niiden tulo ad on kokonaisluku. Sama pätee tulolle cb. Koska luvut ad ja cb ovat kokonaislukuja, niin myös niiden summa $ad + cb$ on kokonaisluku. Vastaavasti koska luvut b ja d ovat kokonaislukuja, niin myös tulo bd on kokonaisluku. Lisäksi $bd \neq 0$, sillä $b \neq 0$ ja $d \neq 0$ (tulon nollasääntö). Näin ollen luku $s + t$ voidaan ilmaista kahden kokonaisluvun osamääränä, jonka lisäksi nimittäjä ei nolla, joten se on määritelmän nojalla rationaaliluku. $\square$

Rationaalilukujen desimaalikehitelmä I

Esimerkki

Etsi desimaalikehitelmä luvulle $5/3$.

Ratkaisu. Huomataan, että

$$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1,666\ldots = 1,\overline{6}.$$

Esimerkki

Etsi murtolukuesitys luvulle $0,03$.

Ratkaisu. Huomataan, että

$$0,03 = \frac{3}{100}.$$

Rationaalilukujen desimaalikehitelmä II

Esimerkki

Etsi murtolukuesitys luvulle $0,333\ldots$

Ratkaisu. Merkitään lukua $0,333\ldots$ muuttujalla x. Tällöin $10x = 3,333\ldots$, joten $10x - x = 3,333\ldots - 0,333\ldots = 3$. Nyt tiedetään, että $9x = 3$. Jaetaan yhtälön molemmat puolet luvulla 9, jolloin saadaan yhtälö

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Näin ollen luku $0,333\ldots = 1/3$.

Rationaalilukujen desimaalikehitelmä III

Esimerkki

Etsi murtolukuesitys luvulle $0,1242424\ldots$

Ratkaisu. Merkitään lukua $0,1242424\ldots$ muuttujalla y. Tällöin $10y = 1,2424\ldots$ ja $1000y = 124,2424\ldots$. Tästä seuraa, että $1000y - 10y = 124,2424\ldots - 1,2424\ldots = 123$. Nyt tiedetään, että $990y = 123$. Jaetaan yhtälön molemmat puolet luvulla 990, jolloin saadaan yhtälö

$$y = \frac{123}{990} = \frac{41}{330}.$$

Näin ollen luku $0,1242424\ldots = 41/330$.

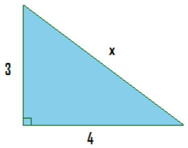
Pythagoras (582-496 eaa.)

PYTHAGORAS.

Pythagoras oli filosofi, matemaatikko ja tutkija antiikin Kreikassa. Hän perusti nimeään kantavan filosofis-uskonnollisen kultin, pythagoralaisuuden. Pythagoralaiset löysivät irrationaaliluvut. Tämä oli kuitenkin järkytys, sillä löydös kumosi silloisen käsityksen rationaalilukujen riittävyydestä maailman selittäjänä. Pythagoras tunnetaan parhaiten Pythagoran lauseesta, vaikka lauseen sisältö oli tunnettu Egyptissä ja Mesopotamiassa yli tuhat vuotta aikaisemmin.

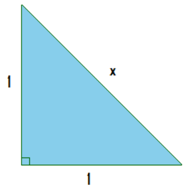
Suorakulmainen kolmio

Pythagoraan lauseen mukaan suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituuden neliö on kateettien pituuksien neliöiden summa. Tarkastellaan seuraavaa kolmiota:



Hypotenuusan pituudelle x pätee siis $x^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. Koska $5^2 = 25$, niin hypotenuusan pituudeksi saadaan $x = 5$.

Tarkastellaan sitten seuraavaa kolmiota:



Hypotenuusan pituudelle x saadaan yhtälö $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Yhtälölle ei löydy ratkaisua luonnollisista luvuista eikä rationaaliluvuista. Hypotenuusan pituuden täytyy kuitenkin olla jokin luku, joten merkitään sitä $\sqrt{2}$.

Irrationaaliluvut

Edellisen kolmion hypotenuusan pituus $\sqrt{2}$ on esimerkki **irrationaaliluvusta** eli luvusta, joka ei ole rationaaliluku (ts. ei ole muotoa m/n, $n \neq 0$). Miten tämä voitaisiin todistaa? (On huomattavasti helpompi todistaa, että esimerkiksi luku $0,1\overline{6}$ on rationaalinen: riittää vain laskea sille murtolukuesitys $1/6$.)

Reaaliluvut $\mathbb{R}$

Reaaliluvut saadaan rationaaliluvuista lisäämällä niihin kaikki irrationaaliluvut.

- Reaalilukuja voidaan ajatella lukusuorana
- Reaalilukujen desimaalikehitelmät voivat olla päättymättömiä ja jaksottomia (näin on aina irrationaaliluvuilla) (esim. $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$, $\pi = 3,14159265358979323\ldots$)
- Reaaliluvut ovat järjestyksessä
- Ei löydy suuruusjärjestyksessä seuraavaa reaalilukua
- Ei ole suurinta eikä pienintä reaalilukua

Määritelmä

Reaalilukuja ovat sellaiset luvut, jotka voidaan ilmaista (mahdollisesti päättymättömänä ja jaksottomana) desimaalikehitelmänä.

Lukujärjestelmät

Lukujärjestelmällä tarkoitetaan lukujen ilmaisemiseen käytettävää kokonaisvaltaista tapaa. Vuosisatojen aikana ihmiset ovat käyttäneet monia eri lukujärjestelmiä. Tällä hetkellä yleisimmän 10-järjestelmän rinnalla käytetään mm. binääri- ja heksadesimaalijärjestelmiä.

Kymmenjärjestelmä

Kymmenjärjestelmä on paikkajärjestelmä, jonka kantalukuna toimii luku 10. Kaikki luvut ilmaistaan siis luvun 10 potenssien avulla. Käytössä ovat luvut $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$. Esimerkiksi kymmenjärjestelmän luku 123 on muodostettu seuraavasti:

$$123_{10} = \underline{1} \cdot 10^2 + \underline{2} \cdot 10^1 + \underline{3} \cdot 10^0 = \underline{1} \cdot 100 + \underline{2} \cdot 10 + \underline{3} \cdot 1.$$

Ensimmäinen luku oikealta kertoo siis ykkösten lukumäärän, toinen luku oikealta kymmenten lukumärään, kolmas luku oikealta satojen lukumäärän jne.

Binäärijärjestelmä

Binäärijärjestelmä on paikkajärjestelmä, jonka kantalukuna toimii luku 2. Kaikki luvut ilmaistaan siis luvun 2 potenssien avulla. Käytössä ovat luvut 0 ja 1. Esimerkiksi binäärijärjestelmän luku 1011 muutetaan 10-järjestelmään seuraavasti:

$$\begin{aligned}1011_2 &= \underline{1}\cdot 2^3 + \underline{0}\cdot 2^2 + \underline{1}\cdot 2^1 + \underline{1}\cdot 2^0 = \underline{1}\cdot 8 + \underline{0}\cdot 4 + \underline{1}\cdot 2 + \underline{1}\cdot 1\\ &= 8 + 0 + 2 + 1 = 11_{10}.\end{aligned}$$

Käytännössä kaikki tietokoneet perustuvat binäärijärjestelmään.

Heksadesimaalijärjestelmä

Heksadesimaalijärjestelmä on 16-kantainen järjestelmä. Kaikki luvut ilmaistaan siis luvun 16 potenssien avulla. Käytössä ovat luvut $0, 1, 2, \ldots, 9$, sekä kirjaimet $A, B, C, \ldots, F$, joiden avulla merkitään lukuja $10 - 16$. Esimerkiksi heksadesimaalijärjestelmän luku $7FA$ muutetaan 10-järjestelmään seuraavasti:

$$\begin{aligned}7FA_{16} &= \underline{7} \cdot 16^2 + \underline{15} \cdot 16^1 + \underline{10} \cdot 16^0 \\ &= \underline{7} \cdot 256 + \underline{15} \cdot 16 + \underline{10} \cdot 1 = 3\ 542_{10}.\end{aligned}$$

Lukujärjestelmät

Esimerkki

Muunna 10-järjestelmän luku 57 binäärijärjestelmään.

Ratkaisu. Tutkitaan ensin luvun 2 potensseja. Tiedetään, että

$$2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,$$
$$2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,\ \ldots$$

Suurin luvun 2 potenssi, jolle kerroin voidaan antaa on 2^5. Luvun muodostaminen on siis seuraavassa vaiheessa:

$$\underline{1} \cdot 2^5 = 32.$$

Lukuun täytyy lisätä vielä luvun $25 - 16 = 9$ edestä kertoimia. Suurin luvun 2 potenssi, joka tähän tarkoitukseen voidaan valita, on 2^3. Luvun muodostaminen on siis seuraavassa vaiheessa:

$$\underline{1} \cdot 2^5 + \underline{1} \cdot 2^4 + \underline{1} \cdot 2^3 = 56.$$

Lukuun täytyy vielä lisätä luku yksi. Tämä onnistuu luvun 2^0 avulla. Nyt luku on lopullisessa muodossaan

$$\underline{1}\cdot 2^5+\underline{1}\cdot 2^4+\underline{1}\cdot 2^3+\underline{0}\cdot 2^2+\underline{0}\cdot 2^1+\underline{1}\cdot 2^0 = 57$$

Näin ollen $57_{10} = 111001_2$.