Matematiikka tutuksi -kurssi

kuvaukset eli funktiot

Avoin yliopisto & Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto
Kesä 2015

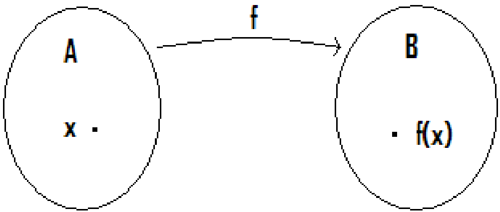
Juulia Lahdenperä

Funktiot

Funktio on eräs matematiikan tärkeimmistä käsitteistä. Sen voi intuitiivisesti ajatella kuvaavan riippuvuussuhdetta, jossa tarkasteltava suure määräytyy täsmällisesti jostakin muusta suureesta.

Funktion määritelmä

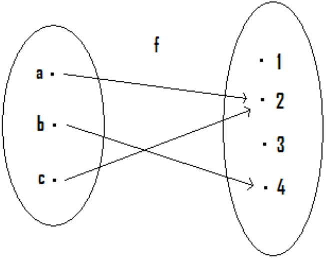
Olkoot A ja B joukkoja. **Funktio** eli **kuvaus** f joukolta A joukkoon B, merk. $f : A \to B$, liittää jokaiseen alkioon $x \in A$ **täsmälleen yhden** alkion $f(x) \in B$.



Sanotaan, että joukko A on kuvauksen f **määrittelyjoukko** (tai **lähtöjoukko**) ja joukko B sen **maalijoukko**.

Esimerkki funktiosta

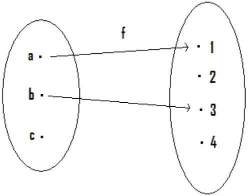
Esim. Olkoon $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Määritellään kuvaus $f : A \to B$ asettamalla $f(a) = 2$, $f(b) = 4$ ja $f(c) = 2$. Kuvaus f voidaan esittää seuraavan nuolikaavion avulla:



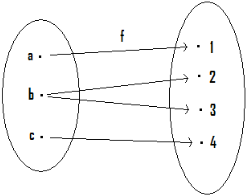
Kuten yllä, kaikkia maalijoukon alkioita ei välttämättä "saavuteta" (mikään joukon A alkio ei kuvaudu joukon B alkioille 1 tai 3). Funktion saavuttamat arvot muodostavat sen **kuvajoukon** (tai **arvojoukon**). Yllä olevan kuvauksen f kuvajoukko on $\{f(a), f(b), f(c)\} = \{2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\} = B$.

Mikä pielessä?

Mikä on pielessä seuraavissa yrityksissä määritellä funktio $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3, 4\}$?



Funktio $f : A \to B$, liittää jokaiseen alkioon $x \in A$ täsmälleen yhden alkion $f(x) \in B$.



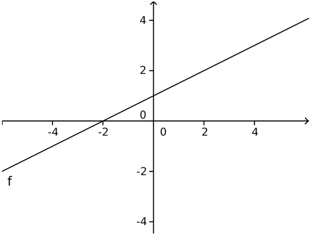
Funktio $f : A \to B$, liittää jokaiseen alkioon $x \in A$ täsmälleen yhden alkion $f(x) \in B$.

Reaalifunktion kuvaaja

Reaalifunktiolla tarkoitetaan funktiota $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tai osajoukolta $A \subset \mathbb{R}$ reaaliluvuille). Niitä on kätevä havainnollistaa koordinaatistoon piirretyillä kuvaajilla.

Esimerkkejä funktioiden kuvaajista

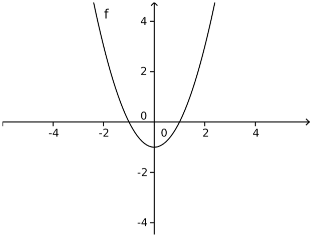
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$



Funktion f kuvaaja on

kulmakertoimella $\frac{1}{2}$ nouseva suora.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$$

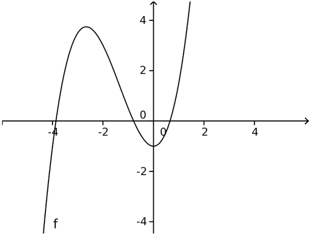


Funktion f kuvaaja on ylöspäin

aukeava paraabeli.

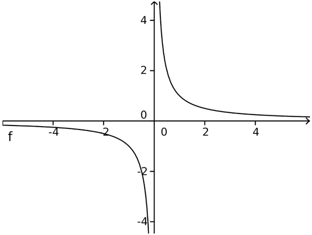
Esimerkkejä funktioiden kuvaajista

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{2}x^3+2x^2-1$



Funktion f kuvaaja on kolmannen asteen käyrä.

$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{x}$



Funktion f arvot kasvavat (vähenevät) rajatta, kun nollaa lähestytään oikealta (vasemmalta).

Lukumääräfunktio

Vilkaisimme aikaisemmin joukon $\{1,2,3\}$ potenssijoukkoa, eli sen kaikkien osajoukkojen muodostamaa joukkoa

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

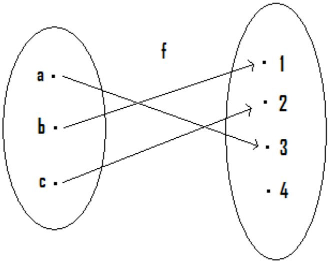
Merkitään tätä joukkoa $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$:lla ja määritellään funktio $\# : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathbb{N}$, joka liittää jokaiseen näistä osajoukoista sen alkioiden lukumäärän (tarkastelemme tätä käsitettä tarkemmin hetken kuluttua). Siis esim. $\#(\{2\}) = 1$, $\#(\emptyset) = 0$ ja $\#(\{1,3\}) = 2$. Myös esim.

$$\#(\{1,2\} \cup \{3\}) = \#(\{1,2\}) + \#(\{3\}).$$

Tällaiset joukoille määritellyt funktiot, jotka jollain tapaa "mittaavat" joukkojen kokoa, ovat erittäin tärkeitä matemaattisessa analyysissa.

Injektio

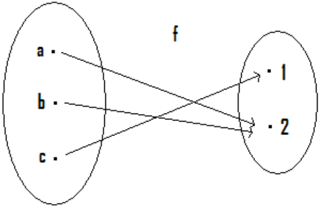
Kuvausta sanotaan **injektioksi**, mikäli lähtöjoukon eri alkiot kuvautuvat maalijoukon eri alkioille. Esimerkiksi alla oleva kuvaus f on injektio:



Funktio f on siis injektio, mikäli ehdosta $f(x_1) = f(x_2)$ seuraa, että $x_1 = x_2$.

Surjektio

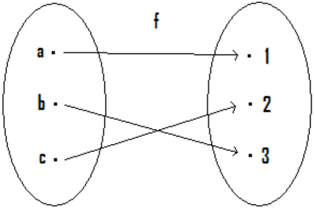
Kuvausta sanotaan **surjektioksi**, mikäli sen arvojoukko on koko maalijoukko. Esimerkiksi alla oleva kuvaus f on surjektio:



Kuvaus $f : A \to B$ on siis surjektio, mikäli jokaista $y \in B$ kohti löytyy $x \in A$, jolle $f(x) = y$.

Bijektio

Funktiota sanotaan **bijektioksi**, mikäli se on sekä injektio että surjektio. Esimerkiksi alla oleva kuvaus f on bijektio:



Esimerkki

Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Näin määritelty funktio on injektio.

Todistus.

Oletetaan, että $f(x) = f(y)$. Tällöin siis $2x + 1 = 2y + 1$. Nyt

$$\begin{array}{lrcll} & 2x+1 & = & 2y+1 & \| -1 \\ \Longrightarrow & 2x & = & 2y & \|: 2 \\ \Longrightarrow & x & = & y & \end{array}$$

Siispä jos $x \neq y$, niin $f(x) \neq f(y)$, eli funktio f on injektio. $\square$

Esimerkki

Osoitetaan, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, on surjektio.

Todistus.

Olkoon $y \in \mathbb{R}$ jokin reaaliluku (maalijoukon alkio). Ratkaistaan yhtälö $f(x) = y$, eli $2x + 1 = y$:

$$\begin{array}{rrcll} & 2x+1 & = & y & \| -1 \\ \iff & 2x & = & y-1 & \|: 2 \\ \iff & x & = & \frac{y-1}{2}. & \end{array}$$

Siispä millä tahansa reaaliluvulla y pätee: $f\left(\frac{y-1}{2}\right) = y$. Koska $\frac{y-1}{2}$ on reaaliluku ja siten lähtöjoukon alkio, jokaista maalijoukon alkiota kohti on löydetty lähtöjoukon alkio, joka sille kuvautuu. Siispä funktio f on surjektio. $\square$

Esimerkki

Osoitetaan, että funktio $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - 1$, ei ole injektio.

Todistus.

Huomataan, että $h(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, ja $h(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$. Funktio siis kuvaa lähtöjoukosta kaksi eri alkiota -1 ja 1 samalle maalijoukon alkiolle, joten se ei ole injektio. $\square$

Esimerkki

Osoitetaan, että funktio $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - 1$, ei ole surjektio.

Todistus.

Tutkitaan, kuvaako funktio h mitään lukua x luvuksi -2.
Tutkitaan siis milloin yhtälö $h(x) = -2$ voisi ratketa.

$$\begin{array}{rrcll} & h(x) & = & -2 & \\ \iff & x^2 - 1 & = & -2 & \parallel +1 \\ \iff & x^2 & = & -1. & \end{array}$$

Funktio h siis kuvaa luvun x luvuksi -2 jos ja vain jos x kerrottuna itsellään on -1. Mikään x ei tätä toteuta (minkään reaaliluvun toinen potenssi ei voi olla negatiivinen), joten funktio h ei kuvaa mitään lukua x luvulle -2, eikä se siten ole surjektio. $\square$

Äärelliset joukot

Tarkastelemme seuraavaksi erilaisten joukkojen kokoja. Lähdetään siitä, että

- tyhjässä joukossa $\emptyset$ ei ole yhtään alkiota
- joukossa $\{1\}$ on yksi alkio
- joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$ on n alkiota

Kuinka mittaamme muunlaisten joukkojen kokoa? Vastaus: Käytämme apuna bijektioita.

Määritelmä

Joukko A on **äärellinen**, mikäli on olemassa bijektio $A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$. Joukossa A on tällöin n alkiota, merkitään $\#A = n$.

Joukossa A on siis tarkalleen n alkiota, mikäli jokaista A:n alkiota vastaa täsmälleen yksi luku $1, 2, \ldots, n$. Huom. myös tyhjää joukkoa sanotaan äärelliseksi.

Esimerkki

Osoita, että joukot $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ja $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ ovat yhtä suuret, toisin sanoen etsi bijektio joukolta A joukolle B.

Ratkaisu: Haluttu bijektio saadaan asettamalla kaikilla $m \in A$

$$f : A \to B, \quad f(m) = \Big(\frac{m+1}{2}\Big)^2.$$

Kuvaus todella on bijektio (tarkista yksityiskohdat).

Entä jos $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ ja $B = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$, ts. molemmissa joukoissa on ääretön määrä alkioita?

Äärettömät joukot

Joukkoa, joka ei ole äärellinen sanotaan **äärettömäksi**. Vaikka tarkasteltavat joukot olisivatkin äärettömiä, voidaan niiden kokoja kuitenkin vertailla:

Määritelmä

Joukot A ja B ovat **yhtä mahtavat** mikäli on olemassa bijektio $A \to B$.

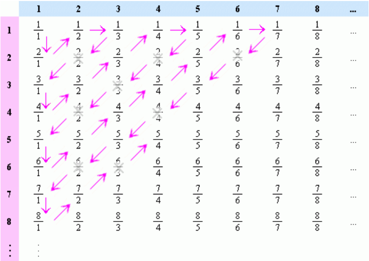
Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on "pienin" ääretön joukko. Sen kanssa yhtä mahtavia joukkoja sanotaan **numeroituvasti äärettömiksi**. Esim. $\mathbb{N}$ ja $\{0, 2, 4, \dots\}$ ovat yhtä mahtavat: $f(n) = 2n$ määrittelee bijektion niiden välille. Joukkojen välillä on siis vastaavuus

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots \end{array}$$

Numeroituvuuden osoittamiseksi riittää oleellisesti löytää tapa luetella tarkasteltavan joukon jäsenet jossakin järjestyksessä. Vastaavasti nähdään helposti, että $\mathbb{Z}$ on numeroituva.

$\mathbb{Q}$ on numeroituva

Esitetään aluksi tapa luetella positiiviset rationaaliluvut. Taulukoidaan ne osoittajan ja nimittäjän suhteen kasvavaan järjestykseen ja lähdetään liikkeelle vasemmasta ylänurkasta, eli luvusta $\frac{1}{1}$ kuvan osoittamalla tavalla. Kuten kuvassa, hypätään vastaantulevan murtoluvun yli, mikäli sitä vastaava rationaaliluku on jo osunut kohdalle. Tällä tavoin saadaan käytyä läpi kaikki positiiviset rationaaliluvut. Huomaa, että lukuja ei lueteltu suuruusjärjestyksessä.



$\mathbb{Q}$ on numeroituva

Entäpä negatiiviset rationaaliluvut? Jos positiivisia rationaalilukuja, joiden joukko juuri osoitettiin numeroituvaksi, merkitään $q_1, q_2, q_3, \dots$, niin voidaan määritellä vastaavuus

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 0 & q_1 & -q_1 & q_2 & -q_2 & \cdots \end{array}$$

On siis olemassa bijektio $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, eli $\mathbb{Q}$ on numeroituva.

$\mathbb{Q}$ on numeroituva

Rationaalilukujen numeroituvuus voidaan nähdä myös toisella tavalla. Määritellään positiivisten kokonaislukujen pareilla (n, m) funktio $f(n, m) = 2^n 3^m$. Koska 2 ja 3 ovat alkulukuja (tutustutaan näihin ensi viikolla), niin f on injektio. Tämä tarkoittaa sitä, että positiivisten kokonaislukujen parien muodostama joukko on "korkeintaan" yhtä mahtava kuin $\mathbb{N}$. Takuulla noita pareja on kuitenkin äärettömän monta ja siten niiden joukko on yhtä mahtava kuin $\mathbb{N}$. Rationaaliluvut voidaan puolestaan ajatella kokonaislukuparien osajoukkona, kuten aiemminkin.

$\mathbb{R}$ on ylinumeroituva

Osoitetaan, että $\mathbb{R}$ on **ylinumeroituva**, ts. että se ei ole numeroituva. Jokainen reaaliluku voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti päättymättömänä desimaalilukuna. Päättyvä luku, esim. $1,2$ kirjoitetaan tässä siis käyttämällä yhdeksikköjä, eli muodossa $1,1999\ldots$. Tehdään vastaoletus: $\mathbb{R}$ on numeroituva. Tässä tapauksessa, kaikki reaaliluvut voidaan esittää luettelossa

$$\begin{array}{ll} n_{11}, c_{12}c_{13}c_{14}\ldots & \qquad m_1, c_{12}c_{13}c_{14}\ldots \\ n_{21}, c_{22}c_{23}c_{24}\ldots & \qquad n_{21}, d_2\, c_{23}c_{24}\ldots \\ n_{31}, c_{32}c_{33}c_{34}\ldots & \qquad n_{31}, c_{32}d_3\, c_{34}\ldots \\ \vdots & \qquad \vdots \end{array}$$

missä n_{ij}:t ovat kokonaislukuja ja c_{ij}:t ovat numeroita $0,1,2,3,\ldots,9$. Konstruoidaan sitten reaaliluku, joka ei ole tuossa luettelossa: Olkoon ensin $m_1 \neq n_{11}$ kokonaisluku, sitten $d_2 \neq c_{22}$ numero,$d_3 \neq c_{33}$ jne. Näin saadaan reaaliluku $m_1, d_2d_3\ldots$, joka ei ole luettelossa (jokainen luettelon luvuista eroaa siitä vähintään yhden desimaalin kohdalla). Tämä on ristiriita, joten vastaoletuksen on oltava väärin.

Reaalilukujen ylinumeroituvia osajoukkoja

- Se, että reaaliluvut voivat olla rajoittamattoman suuria tai pieniä, ei ollut oleellista $\mathbb{R}$:n ylinumeroituvuuden kannalta. Vastaavanlainen konstruktio voitaisiin tehdä yksikkövälille $[0, 1[$, joka siis myös on ylinumeroituva.
- Koska $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, ja $\mathbb{Q}$ on numeroituva, niin irrationaalilukujen joukon $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on oltava ylinumeroituva.
- Aiemmin esillä olleiden algebrallisten reaalilukujen joukko nähdään melko helposti numeroituvaksi. Siispä transendenttisten lukujen joukko on oltava ylinumeroituva. Huom. tämä on eräs tapa osoittaa, että niitä on yleensäkään olemassa.

Luonnollisten lukujen potenssijoukko

Luonnollisten lukujen <u>äärellisten</u> osajoukkojen muodostama joukko on numeroituva, kun taas $\mathbb{N}$:n <u>äärettömien</u> osajoukkojen joukko on ylinumeroituva. Luonnollisten lukujen potenssijoukko, joka koostuu siis $\mathbb{N}$:n äärellisistä <u>ja</u> äärettömistä osajoukoista, on siten ylinumeroituva. Itseasiassa se ja $\mathbb{R}$ ovat yhtä mahtavat.

$]0,1[$ ja $\mathbb{R}$ ovat yhtä mahtavat

Trigonometriaa opiskelleet tuntevat tangenttifunktion

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

$\tan$ on bijektio, joten $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ja $\mathbb{R}$ ovat yhtä mahtavat. Toisaalta, olivatpa $a < b$ ja $c < d$ mitä tahansa reaalilukuja, funktio

$$f :]a,b[\to]c,d[\,, \quad f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

on bijektio. Siis välit $]a,b[$ ja $]c,d[$ ovat yhtä mahtavat. Erityisesti välit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ja $]0,1[$ ovat yhtä mahtavat ja siten $]0,1[$ ja $\mathbb{R}$ ovat yhtä mahtavat.