

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka tutuksi
Kesä 2015
Harjoitus 6 (ke 16.9.2015)

1. Tiedetään kaksi asiaa Allin sekavasta tunne-elämästä: Alli rakastaa Timoa tai Alli rakastaa Mattia. Jos Alli rakastaa Timoa, niin hän rakastaa Mattia. Ketä Alli rakastaa? Entä jos tiedämme, että hän rakastaa vain yhtä?

Ratkaisu. Jos Alli rakastaa Timoa, hän rakastaa myös Mattia. Jos Alli rakastaa Mattia, hän saattaa silti rakastaa myös Timoa. Näin ollen Alli rakastaa joko sekä Timoa että Mattia, tai ainakin Mattia. Jos Alli rakastaa ainoastaan yhtä henkilöä, tämä henkilö on Matti.

2. Alli turvautuu selvänäkijän apuun setviessään tunne-elämänsä kouke-
roita. Hän sanoo: "Minulle on kerrottu, että jos Jaakko rakastaa minua,
niin Kari rakastaa minua. Voinko luottaa tähän tietoon?" Selvänäkijä
vastaa: "Jos Kari rakastaa sinua, niin saamasi tieto pitää paikkansa."
Mitä Alli voi päätellä?

Ratkaisu. Jos Kari rakastaa Allia, niin Jaakon sydämen tilasta ei osata
vielä sanoa mitään. Jos Kari ei kuitenkaan rakasta Allia, niin tällöin
myöskään Jaakko ei häntä rakasta.

3. Laske seuraavat logaritmit suoraan ilman laskinta.

- (a) $\log_5 5^{13}$
- (b) $\log_2 32$

Ratkaisu.

- (a) $\log_5 5^{13} = 13$, sillä $5^{13} = 5^{13}$. Toinen tapa on käyttää logaritmin
laskusääntöjä: $\log_5 5^{13} = 13 \cdot \log_5 5 = 13 \cdot 1 = 13$.
- (b) $\log_2 32 = 5$, sillä $2^5 = 32$.

4. Mitkä ovat seuraavien lukujen 7-kantaiset logaritmit?

- (a) 7
- (b) 7^5

Ratkaisu.

- (a) $\log_7 7 = 1$, sillä $7^1 = 7$.
 (b) $\log_7 7^5 = 5$, sillä $7^5 = 7^5$.

5. Ratkaise seuraavat yhtälöt:

- (a) $6^{2x+1} = 2/5$
 (b) $2^x = 0,92^{3x}$
 (c) $e^{2x} = 5^{x+2}$
 (d) $4^{x+1} = 3^{x+2}$

Ratkaisu.

(a)

$$\begin{aligned} 6^{2x+1} &= \frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow \ln(6^{2x+1}) &= \ln \frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow (2x+1) \cdot \ln 6 &= \ln \frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow (2x+1) \cdot \ln 6 &= \ln 2 - \ln 5 \\ \Leftrightarrow 2x+1 &= \frac{\ln 2 - \ln 5}{\ln 6} \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\ln 2 - \ln 5 - \ln 6}{\ln 6} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\ln 2 - \ln 5 - \ln 6}{2 \ln 6} \\ &\approx -0,76 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2^x &= 0,92^{3x} \\ \Leftrightarrow \frac{2^x}{0,92^{3x}} &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{0,92^3}\right)^x &= 1 \\ \Leftrightarrow x \cdot \ln\left(\frac{2}{0,92^3}\right) &= \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön nojalla joko $x = 0$ tai $\ln(2/0,92^3) = 0$. Näistä jälkimmäinen ei ole tosi, joten yhtälön ainoa ratkaisu on $x = 0$.

(c)

$$\begin{aligned}e^{2x} &= 5^{x+2} \\ \Leftrightarrow 2x \ln e &= (x+5) \ln 5 \\ \Leftrightarrow 2x &= x \ln 5 + 2 \ln 5 \\ \Leftrightarrow x(2 - \ln 5) &= 2 \ln 5 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2 \ln 5}{2 - \ln 5} \\ &\approx 8,2\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}4^{x+1} &= 3^{x+2} \\ \Leftrightarrow (x+1) \ln 4 &= (x+2) \ln 3 \\ \Leftrightarrow x \ln 4 + \ln 4 &= x \ln 3 + 2 \ln 3 \\ \Leftrightarrow x(\ln 4 - \ln 3) &= 2 \ln 3 - \ln 4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2 \ln 3 - \ln 4}{\ln 4 - \ln 3} \\ &\approx 2,8\end{aligned}$$

Hiilen ^{14}C -isotoopin puoliintumisaika on 5 730 vuotta.

6. Kuinka paljon hiiltä ^{14}C on jäljellä 986 vuoden kuluttua, jos sitä on alunperin 13 grammaa?

Ratkaisu. Ajan t (vuotta) kuluttua hiiltä on jäljellä

$$n(t) = n_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

grammaa, missä n_0 on hiilen määrä grammoina hetkellä $t = 0$. Nyt $n_0 = 13$. Hiiltä on siis jäljellä 986 vuoden kuluttua

$$n(986) = 13 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{986}{5730}} \approx 11,5 \text{ grammaa.}$$

7. Kuinka kauan kestää, että 2 grammasta hiilen ^{14}C -isotooppia on hajonnut 97 %?

Ratkaisu. Kun hiiltä on hajonnut 97 %, sitä on jäljellä 3 % alkuperäisestä määrästä eli $0,03 \cdot n_0$. Saadaan siis yhtälö

$$n(t) = n_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = 0,03 \cdot n_0.$$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä t eli hajoamiseen kulunut aika:

$$\begin{aligned}n(t) &= n_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = 0,03 \cdot n_0 \\&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = 0,03 \\&\Leftrightarrow \ln \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \right) = \ln 0,03 \\&\Leftrightarrow \frac{t}{5730} \cdot \ln \frac{1}{2} = \ln 0,03 \\&\Leftrightarrow t = \frac{5730 \cdot \ln 0,03}{\ln \frac{1}{2}} \\&\approx 29\,000 \text{ vuotta.}\end{aligned}$$

8. Kolmensadan yksilön bakteerikanta asetetaan laboratoriossa petrimaljaan, missä olosuhteet ovat sellaiset, että bakteerien määrä kaksinkertaistuu aina 11 tunnin välein. Kuinka kauan kestää, että bakteerikannan koko ylittää miljoonan?

Ratkaisu. Ajan t (tuntia) kuluttua bakteerien määrä on

$$N(t) = 300 \cdot 2^{\frac{t}{11}}.$$

Ratkaistaan yhtälö $N(t) = 1\,000\,000$:

$$\begin{aligned}N(t) &= 300 \cdot 2^{\frac{t}{11}} = 1\,000\,000 = 10^6 \\&\Leftrightarrow \ln \left(300 \cdot 2^{\frac{t}{11}} \right) = \ln (10^6) \\&\Leftrightarrow \ln 300 + \ln \left(2^{\frac{t}{11}} \right) = 6 \cdot \ln 10 \\&\Leftrightarrow \ln 300 + \frac{t}{11} \cdot \ln 2 = 6 \cdot 1 \\&\Leftrightarrow \frac{t}{11} = \frac{6 - \ln 300}{\ln 2} \\&\Leftrightarrow t = 11 \cdot \frac{6 - \ln 300}{\ln 2} \\&\Leftrightarrow t \approx 128,7\end{aligned}$$

Bakteerien määrä ylittää miljoonan siis noin 129 tunnin kuluttua.