Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka tutuksi
Kesä 2015
Harjoitus 5 (ke 9.9.2015)

⋆ ⋆ ⋆

Osoita induktiolla, että kaava

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1(1+1) + 2(2+1) + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

1. Osoita, että yhtälö pätee tapauksessa $n = 1$.

   Ratkaisu. Tutkitaan ensin tapausta $n = 1$. Yhtälön vasen puoli on muotoa

$$\sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 1(1+1) = 2$$

   ja oikea puoli muotoa

$$\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

   Siispä yhtälö pätee, kun $n = 1$.

2. Tee induktio-oletus ja muodosta induktioväite. Osoita induktioväite todeksi käyttämällä hyväksi induktio-oletusta. Tee johtopäätökset.

   Ratkaisu. Tehdään seuraavaksi induktio-oletus:

   Oletetaan, että yhtälö (**??**) pätee jollakin $k \in \mathbb{N}$, eli

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1) = 1(1+1) + 2(2+1) + \ldots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Osoitetaan, että yhtälö pätee myös arvolla $k+1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) &= 1(1+1) + 2(2+1) + \ldots + k(k+1) + (k+1)((k+1)+1) \\
&\overset{\text{I.O}}{=} \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)((k+1+)1) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.
\end{aligned}
$$

Nyt induktioperiaatteen nojalla yhtälö

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1(1+1) + 2(2+1) + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \in \mathbb{N}$.

$\star\star\star$

Todista induktiolla seuraava epäyhtälö: Kun $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, niin

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \tag{1}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

3. Osoita, että yhtälö pätee tapauksessa $n = 0$.

   Ratkaisu. Huomataan ensiksi, että kun $x \in [-1, \infty[$ on

   $$1 + x \geq 0 \Rightarrow (1+x)^n \geq 0$$

   kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tämä rajoitus x:n arvoille on tärkeä, sillä jos $1 + x < 0$ tulisi ongelmia silloin, kun n olisi pariton, esim.

   $$(1 + (-3))^5 = (-2)^5 = -32 < -14 = 1 + 5 \cdot (-3).$$

   Siirrytään nyt väitteen todistukseen. Tutkitaan ensiksi tapaus $n = 0$:

   $$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 = 1 + 0 \cdot x,$$

   kun $x \in [-1, \infty[$, eli yhtälö (1) pätee arvolla $n = 0$.

4. Tee induktio-oletus ja muodosta induktioväite. Osoita induktioväite todeksi käyttämällä hyväksi induktio-oletusta. Tee johtopäätökset.

   Ratkaisu. Tehdään seuraavaksi induktio-oletus:

   Oletetaan, että on olemassa jokin $m \in \mathbb{N}$, jolla yhtälö (1) pätee, kun $x \in [-1, \infty[$.

   Tarkastellaan tapausta $m + 1$:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{m+1} &= (1+x)^m (1+x) \overset{I.O.}{\geq} (1+mx)(1+x) \\
&= 1 + x + mx + \underbrace{mx^2}_{\geq 0} \geq 1 + x + mx = 1 + (m+1)\, x,
\end{aligned}
$$

   eli $(1+x)^{m+1} \geq 1 + (m+1)\, x$, kun $x \in [-1, \infty[$.

   Nyt olemme induktioperiaatteen nojalla osoittaneet, että kun $x \in [-1, \infty[$, niin väite pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

   ⋆ ⋆ ⋆

5. Merkitään propositiosymboleilla seuraavia lauseita:

   p_0: Sataa.

   p_1: Tuulee.

   p_2: On kylmä.

   Formalisoi seuraavat lauseet propositiologiikan kaavoilla:

   (a) Jos sataa ja tuulee, niin on kylmä.
   (b) Jos on kylmä, mutta ei sada, niin tuulee.
   (c) Jos ei sada, niin ei ole kylmä, paitsi jos tuulee.

   Ratkaisu.

   (a) $(p_0 \wedge p_1) \to p_2$
   (b) $(p_2 \wedge \neg p_0) \to p_1$
   (c) $\neg p_0 \to (\neg p_2 \vee p_2)$ tai $(\neg p_0 \to \neg p_2) \vee p_1$

6. Keksi luonnollisen kielen lause, jonka formalisointi on muotoa

$$((p_0 \to (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_2) \to (p_0 \to p_1).$$

7. Formalisoi lause ”Joko Hannu ostaa appelsiineja ja banaaneja, tai Kerttu ostaa tomaatteja, mutta kumpikaan ei osta kurkkua.” propositiologiikan kaavoilla.

   Ratkaisu. Merkitään

   p_0: Hannu ostaa appelsiineja.

   p_1: Hannu ostaa banaaneja.

   p_2: Terttu ostaa tomaatteja.

   p_3: Hannu ostaa kurkkua.

   p_4: Terttu ostaa kurkkua.

   Tällöin lause on formalisoituna $((p_0 \wedge p_1) \vee p_2) \wedge (\neg p_3 \wedge \neg p_4)$.

8. Selvitä totuustaulun avulla onko lause

   (a) $p_0 \to \neg p_0$

   (b) $p_0 \vee \neg(p_0 \wedge p_1)$

   tautologia, kontingentti vai ristiriita.

   Ratkaisu.

   (a) Piirretään totuustaulu:

p_0	p_0	$\to$	$\neg$	p_0
1	1	**0**	0	1
0	0	**1**	1	0

   Koska lause voi olla joko tosi tai epätosi, se on kontingentti.

   (b) Piirretään totuustaulu:

p_0	p_1	p_0	$\vee$	$\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$
1	1	1	**1**	0	1	1	1
1	0	1	**1**	1	1	0	0
0	1	0	**1**	1	0	0	1
0	0	0	**1**	1	0	0	0

   Koska lause on kaikilla totuusjakaumilla aina tosi, se on tautologia.