Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka tutuksi
Kesä 2015
Harjoitus 5 (ke 9.9.2015)

$\star\star\star$

Osoita induktiolla, että kaava

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1(1+1) + 2(2+1) + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

1. Osoita, että yhtälö pätee tapauksessa $n = 1$.

2. Tee induktio-oletus ja muodosta induktioväite. Osoita induktioväite todeksi käyttämällä hyväksi induktio-oletusta. Tee johtopäätökset.

$\star\star\star$

Todista induktiolla seuraava epäyhtälö: Kun $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, niin

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

3. Osoita, että yhtälö pätee tapauksessa $n = 1$.

4. Tee induktio-oletus ja muodosta induktioväite. Osoita induktioväite todeksi käyttämällä hyväksi induktio-oletusta. Tee johtopäätökset.

$\star\star\star$

5. Merkitään propositiosymboleilla seuraavia lauseita:

   p_0: Sataa.

   p_1: Tuulee.

   p_2: On kylmä.

   Formalisoi seuraavat lauseet propositiologiikan kaavoilla:

   (a) Jos sataa ja tuulee, niin on kylmä.

(b) Jos on kylmä, mutta ei sada, niin tuulee.

(c) Jos ei sada, niin ei ole kylmä, paitsi jos tuulee.

6. Keksi luonnollisen kielen lause, jonka formalisointi on muotoa

$$((p_0 \to (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_2) \to (p_0 \to p_1).$$

7. Formalisoi lause ”Joko Hannu ostaa appelsiineja ja banaaneja, tai Kerttu ostaa tomaatteja, mutta kumpikaan ei osta kurkkua.” propositiologiikan kaavoilla.

8. Selvitä totuustaulun avulla onko lause

   (a) $p_0 \to \neg p_0$

   (b) $p_0 \vee \neg(p_0 \wedge p_1)$

   tautologia, kontingentti vai ristiriita.