Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka tutuksi
Kesä 2015
Harjoitus 4 (ke 2.9.2015)

1. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että $n(n^2 + 2)$ on kolmella jaollinen.

   *Ratkaisu.* Huomataan, että

   $$n(n^2 + 2) = n(n^2 - 1 + 3) = n(n^2 - 1) + 3n = n(n-1)(n+1) + 3n.$$

   Huomataan, että luvut $n - 1$, $n$ ja $n + 1$ ovat kolme peräkkäistä luonnollista lukua. Siispä jokin niistä on kolmella jaollinen. Tästä seuraa, että tulo $n(n-1)(n+1)$ on kolmella jaollinen. Lisäksi nähdään selvästi, että luku $3n$ on kolmella jaollinen. Näin ollen $n(n^2 + 2)$ on kolmella jaollinen.

2. (a) Kirjoita lukujen 512, 719, 100, 888 ja 317 alkulukuhajotelmat.

   (b) Määritä $syt(783, 5)$ ja $syt(12\ 784, 169)$.

   *Ratkaisu.*

   (a)

   $$\begin{aligned}
   512 &= 2 \cdot 256 = 2^2 \cdot 128 = 2^3 \cdot 64 = 2^4 \cdot 32 = 2^5 \cdot 16 = 2^6 \cdot 8 \\
   &= 2^7 \cdot 4 = 2^8 \cdot 2 = 2^9 \\
   719 &= 1 \cdot 719 \\
   100 &= 2 \cdot 50 = 2^2 \cdot 25 = 2^2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2 \\
   888 &= 2 \cdot 444 = 2^2 \cdot 222 = 2^3 \cdot 111 = 2^3 \cdot 3 \cdot 37 \\
   317 &= 1 \cdot 317
   \end{aligned}$$

   (b) Tutkitaan ensin lukujen 783 ja 5 suurinta yhteistä tekijää Euklideen algoritmilla:

   $$\begin{aligned}
   783 &= 5 \cdot 156 + 3 \\
   5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\
   3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
   2 &= 1 \cdot 2 + 0
   \end{aligned}$$

   Näin ollen $syt(783, 5) = 1$.

Tutkitaan sitten lukujen 12 784 ja 169 suurinta yhteistä tekijää:

$$
\begin{aligned}
12\ 784 &= 169 \cdot 75 + 109 \\
169 &= 109 \cdot 1 + 60 \\
109 &= 60 \cdot 1 + 49 \\
60 &= 49 \cdot 1 + 11 \\
49 &= 11 \cdot 4 + 5 \\
11 &= 5 \cdot 2 + 1 \\
5 &= 1 \cdot 5 + 0
\end{aligned}
$$

Siispä myös $syt(12\ 784, 169) = 1$.

3. Kirjoita seuraavien jonojen yleinen termi (eli n. termi).

   (a) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
   (b) $6, 11, 16, 21, 26, \ldots$
   (c) $11, 16, 15, 17, 19, \ldots$

   Kirjoita seuraavien kaavojen määrittelemien jonojen viisi ensimmäistä termiä.

   (d) $\dfrac{n}{n+1}$ (e) $n^2 + 1$ (f) $\dfrac{1}{2^n}$

   *Ratkaisu.* Huomataan, että jonot ovat aritmeettisia jonoja, sillä kahden peräkkäisen termin erotus on vakio. Merkitään jonon yleistä termiä $a_n$. Tiedämme, että aritmeettisen jonon yleiselle termille pätee $a_n = a_1 + d(n-1)$, missä $d$ on jonon peräkkäisten termien erotus.

   a) Jonon peräkkäisten termien erotus on 2. Siispä jonon yleinen termi $a_n$ on muotoa $a_n = 1 + 2(n-1)$.
   b) Jonon peräkkäisten termien erotus on 5. Siispä jonon yleinen termi $a_n$ on muotoa $a_n = 6 + 5(n-1)$.
   c) Jonon peräkkäisten termien erotus ja suhde eivät kumpikaan ole vakioita. Näin ollen emme osaa käsitellä jonoa tämän kurssin tiedoilla.

   Kirjoitetaan lukujonot auki siten, että ensimmäiset viisi termiä ovat näkyvissä:

   d) Kaava $a_n = \frac{n}{n+1}$ määrittää jonon

   $$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1}, \frac{3}{3+1}, \frac{4}{4+1}, \frac{5}{5+1}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\right).$$

e) Kaava $a_n = n^2 + 1$ määrittää jonon

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1^2+1, 2^2+1, 3^2+1, 4^2+1, 5^2+1, \ldots) = (2, 5, 10, 17, 26, \ldots).$$

f) Kaava $a_n = \frac{1}{2^n}$ määrittää jonon

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^5}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right).$$

4. (a) Aritmeettisen jonon toinen termi on 5 ja kolmas termi 9. Mikä on jonon 73. termi?

   (b) Geometrisen jonon toinen termi on 2 ja kolmas termi 0,5. Mikä on jonon 16. termi?

   *Ratkaisu.*

   a) Aritmeettisen jonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ $n$:s termi on muotoa

   $$a_n = a_1 + (n-1)\, d.$$

   Tiedämme toisen termin olevan 5, eli

   $$a_2 = a_1 + (2-1)d = 5 \Leftrightarrow d = 5 - a_1. \tag{0.1}$$

   Tämän lisäksi tiedämme kolmannen termin olevan 9, josta seuraa että

   $$\begin{aligned} a_3 = a_1 + (3-1)d &\overset{(0.1)}{=} a_1 + 2(5 - a_1) = 9 \\ \Leftrightarrow a_1 - 2a_1 &= 9 - 10 \Leftrightarrow a_1 = 1, \end{aligned}$$

   ja aiemman perusteella $d = 5 - a_1 = 5 - 1 = 4$. Olemme siis päätelleet että jonon $n$:s termi

   $$a_n = 1 + (n-1)\, 4,$$

   joten jonon 73. termi on $a_{73} = 1 + 72 \cdot 4 = 289$.

   b) Geometrisen jonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ $n$:s termi on muotoa

   $$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

   Tiedämme toisen termin olevan 2, joten $a_1 \neq 0 \neq q$, ja

   $$a_2 = a_1 q^{2-1} = a_1 q = 2 \Leftrightarrow q = \frac{2}{a_1}. \tag{0.2}$$

Lisäksi tiedämme kolmannen termin olevan $0,5$, eli

$$\begin{aligned} a_3 = a_1 q^{3-1} = a_1 q^2 &\overset{(0.2)}{=} a_1 \left(\frac{2}{a_1}\right)^2 = a_1 \cdot \frac{4}{a_1^2} \\ &= \frac{4}{a_1} = 0,5 \Leftrightarrow a_1 = \frac{4}{0,5} = 8, \end{aligned}$$

ja aiemman perusteella

$$q = \frac{2}{a_1} = \frac{1}{4}.$$

Olemme siis päätelleet, että jonon $n$:s termi

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{8}{4^{n-1}} = \frac{2}{4^{n-2}},$$

joten jonon 16. termi

$$a_{16} = \frac{2}{4^{14}} \approx 7.45 \cdot 10^{-9}.$$

5. Laske seuraavat summat.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} iv$ (b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{20} 12$ (c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{5} \frac{2j+1}{j+1}$

*Ratkaisu.*

a)

$$\sum_{i=1}^{5} iv = 1v + 2v + 3v + 4v + 5v = 15v.$$

b)

$$\sum_{k=3}^{20} 12 = \underbrace{12 + 12 + \ldots + 12}_{18 \text{ kpl}} = 18 \cdot 12 = 216.$$

c)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{5} \frac{2j+1}{j+1} &= \frac{2\cdot 0+1}{0+1} + \frac{2\cdot 1+1}{1+1} + \frac{2\cdot 2+1}{2+1} + \frac{2\cdot 3+1}{3+1} + \frac{2\cdot 4+1}{4+1} + \frac{2\cdot 5+1}{5+1} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \frac{9}{5} + \frac{11}{6} \\
&= \frac{6}{6} + \frac{9}{6} + \frac{10}{6} + \frac{35}{20} + \frac{36}{20} + \frac{11}{6} \\
&= \frac{36}{6} + \frac{71}{20} \\
&= \frac{120}{20} + \frac{71}{20} \\
&= \frac{191}{20}.
\end{aligned}$$

6. Lasse on ollut töissä eräässä elektroniikkakaupassa vuodet 2006-2012. Aloittaessaan työt Lassen kuukausipalkka oli 2 100 euroa. Sopimuksen mukaan hänen palkkansa nousi vuosittain 1,5%. Kuinka paljon Lassen kuukausipalkka oli vuonna 2012? Entä kuinka paljon Lasse tienasi yhteensä näiden 7 vuoden aikana?

   *Ratkaisu.* Olkoon Lassen kuukausipalkka vuonna $x$ $P_x$ euroa. Nyt tiedämme, että $P_{2006} = 2100$ ja että Lassen vuotuinen palkankorotus on $1,5\%$ edellisvuoden palkasta. Tämän perusteella voimme päätellä, että kun $h \in \mathbb{N}$, niin

$$\begin{aligned}
P_{2006+h} &= 1,015 \cdot P_{2006+(h-1)} \\
&= 1,015\left(1.015 \cdot P_{2006+(h-2)}\right) = 1,015^2 \cdot P_{2006+(h-2)} \\
&\vdots \\
&= 1,015^h \cdot P_{2006+(h-h)} = 1,015^h \cdot P_{2006} = 1,015^h \cdot 2100,
\end{aligned}$$

   ja erityisesti

$$P_{2012} = P_{2006+6} = 1,015^6 \cdot 2100 \approx 2296,23.$$

   Siispä Lassen kuukausipalkka vuonna 2012 oli 2 296,23 euroa.

   Näillä merkinnöillä on selvää, että Lassen vuositulot vuonna $x$ saadaan kaavan $12 \cdot P_x$ avulla. Näin ollen Lassen tulot vuosina 2006-2012 saadaan summaamalla vuosien 2006-2012 vuositulot keskenään, eli

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{6} 12 \cdot P_{2006+k} &= \sum_{k=0}^{6} 12 \cdot 1,015^k \cdot 2100 = 12 \sum_{k=0}^{6} 1,015^k \cdot 2100 \\ &\underset{\substack{\text{geom.}\\\text{summa}}}{=} 12 \left( 2100 \cdot \frac{1 - 1,015^7}{1 - 1,015} \right) = 184539,45\ldots \\ &\approx 185\ 000.\end{aligned}$$

Näin ollen Lasse tienasi vuosina 2006-2012 yhteensä 185 000 euroa.