Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka tutuksi
Kesä 2015
Harjoitus 3 (ke 26.8.2015)

1. Olkoon $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 1$ ja $g(x) = x^2$. Määritä yhdistetyt funktiot $f \circ g$ ja $g \circ f$. Onko $f \circ g = g \circ f$?

   Ratkaisu. Kuvaus $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on

   $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = (x^2)^3 + 1 = x^6 + 1,$$

   ja kuvaus $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on

   $$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 + 1) &= (x^3 + 1)^2 = x^3 \cdot x^3 + x^3 + x^3 + 1 \cdot 1 \\ &= x^6 + 2x^3 + 1.\end{aligned}$$

   Näin ollen $f \circ g \neq g \circ f$.

2. Olkoon $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 1$ ja $g(x) = x^2$.

   (a) Määritä funktion f käänteisfunktio $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jos se on olemassa.

   (b) Määritä funktion g käänteisfunktio $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jos se on olemassa.

   Ratkaisu.

   (a) Tutkitaan ensin, mikä käänteisfunktion tulisi olla, jos se on olemassa. Ratkaistaan tätä varten yhtälö $f(x) = y$:

   $$\begin{aligned}&f(x) = y \\ \Leftrightarrow\ &x^3 + 1 = y \\ \Leftrightarrow\ &x^3 = y - 1 \\ \Leftrightarrow\ &x = \sqrt[3]{y - 1}.\end{aligned}$$

   Nyt voidaan muodostaa funktio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt[3]{x - 1}$. Tutkitaan sitten yhdistettyjä funktioita $f \circ h$ ja $h \circ f$. Huomataan, että

   $$f(h(x)) = f(\sqrt[3]{x - 1}) = (\sqrt[3]{x - 1})^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$$

ja

$$h(f(x)) = h(x^3+1) = \sqrt[3]{(x^3+1)-1} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Näin ollen kuvaus h on kuvauksen f käänteisfunktio, ja voidaan merkitä $h = f^{-1}$.

(b) Huomataan, että kuvaus $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ ei ole bijektio. Näin ollen kuvauksella g ei ole käänteiskuvausta.

3. (a) Olkoot $\sigma, \tau : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ permutaatioita ja $\sigma = (132)$ ja $\tau = (143)$. Laske permutaatioiden tulo $\sigma \circ \tau$.

   (b) Saat englanninkielisen salaviestin (tällöin aakkosissa on 26 kirjainta). Viestin sanat on muutettu numeroiksi ja salattu eri menetelmillä. Avaa salaukset ja muuta lopuksi numerot niitä vastaaviksi kirjaimiksi (ts. $A = 1, B = 2, \ldots$).

   - (4 12 1) (Käytetty salausmenetelmä: Caesar)
   - (17 2 18 6 1 7) (Käytetty salausmenetelmä: ROT13)
   - (16 12 1 25) (Käytetty salausmenetelmä: identtinen kuvaus)
   - (4 5 3) (Käytetty salausmenetelmä: kertominen vasemmalta permutaatiolla (9 5 4 3), ts. (9 5 4 3) $\circ$ (salattu sana numeroina) = (4 5 3)).

Ratkaisu.

(a)

$$\sigma \circ \tau = (132)(143) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= (142)$$

(b) Salattu viesti on ”God doesn’t play dice.” Kyseessä on Albert Einsteinin kommentti kvanttisuperposition käsitteeseen. (Huomaa, että alkuperäisessä tehtävässä oli erinäisiä ongelmia. Näitä pohdittiin yhdessä laskuharjoitustilaisuudessa.)

4. (a) Osoita, että luku 1353 on jaollinen luvulla 11.

   (b) Osoita, että jos luku b on jaollinen luvulla a ja luku c on jaollinen luvulla b, niin tällöin luku c on jaollinen luvulla a.

Ratkaisu.

(a) Huomataan, että $1\ 353 = 11 \cdot 123$, joten se on jaollinen luvulla 11.

(b) Oletetaan, että luku b on jaollinen luvulla a, ja että luku c on jaollinen luvulla b. Tällöin $b = aj$ jollakin $j \in \mathbb{Z}$, ja $c = bk$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Nyt $c = bk = (aj)k = a(jk)$, missä $jk \in \mathbb{Z}$. Näin ollen luku c on jaollinen luvulla a.

5. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että $n^2 + n + 1$ on pariton.
Vihje. Tutki erikseen parittomia ja parillisia lukuja.

Ratkaisu. Oletetaan ensin, että n on parillinen luku. Tällöin luku n on muotoa $2k$, missä $k \in \mathbb{N}$. Nyt

$$n^2 + n + 1 = (2k)^2 + 2k + 1 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1,$$

joka on pariton luku.

Oletetaan sitten, että n on pariton luku. Tällöin luku n on muotoa $2k + 1$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (2k + 1)^2 + (2k + 1) + 1 = 4k^2 + 2k + 2k + 1 + 2k + 1 + 1 \\ &= 4k^2 + 6k + 2 + 1 = 2(2k^2 + 3k + 1) + 1, \end{aligned}$$

joka on pariton luku.

Näin ollen $n^2 + n + 1$ on pariton luku kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

6. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että jos n on pariton, niin myös n^2 on pariton, ja jos n on parillinen, niin myös n^2 on parillinen.

Ratkaisu. Oletetaan, että n parillinen luku. Tällöin se on muotoa $2k$, missä $k \in \mathbb{N}$. Nyt $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ on parillinen luku.

Oletetaan sitten, että n pariton luku. Tällöin $n = 2k+1$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Nyt $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+2k+2k+1 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$, joka on pariton luku.