

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka tutuksi
Kesä 2015
Harjoitus 3 (ke 26.8.2015)

1. Olkoon $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ ja $g(x) = x^2$. Määritä yhdistetyt funktiot $f \circ g$ ja $g \circ f$. Onko $f \circ g = g \circ f$?
2. Olkoon $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ ja $g(x) = x^2$.
 - (a) Määritä funktion f käänteisfunktio $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jos se on olemassa.
 - (b) Määritä funktion g käänteisfunktio $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jos se on olemassa.
3. (a) Olkoot $\sigma, \tau : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ permutaatioita ja $\sigma = (132)$ ja $\tau = (143)$. Laske permutaatioiden tulo $\sigma \circ \tau$.
(b) Saat englanninkielisen salaviestin (tällöin aakkosissa on 26 kirjainta). Viestin sanat on muutettu numeroiksi ja salattu eri menetelmillä. Avaa salaukset ja muuta lopuksi numerot niitä vastaaviksi kirjaimiksi (ts. $A = 1, B = 2, \dots$).
 - (4 12 1) (Käytetty salausmenetelmä: Caesar)
 - (17 2 18 6 1 7) (Käytetty salausmenetelmä: ROT13)
 - (16 12 1 24) (Käytetty salausmenetelmä: identtinen kuvaus)
 - (4 5 3) (Käytetty salausmenetelmä: kertominen vasemmalta permutaatiolla (9 5 4 3), ts. $(9\ 5\ 4\ 3) \circ$ (salattu sana numeroina) = (4 5 3)).
4. (a) Osoita, että luku 1353 on jaollinen luvulla 11.
(b) Osoita, että jos luku b on jaollinen luvulla a ja luku c on jaollinen luvulla b , niin tällöin luku c on jaollinen luvulla a .
5. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että $n^2 + n + 1$ on pariton.
Vihje. Tutki erikseen parittomia ja parillisia lukuja.
6. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että jos n on pariton, niin myös n^2 on pariton, ja jos n on parillinen, niin myös n^2 on parillinen.