Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka tutuksi
Kesä 2015
Harjoitus 2 (ke 19.8.2015)
Ratkaisut (JLa)

1. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}$ ja $C = \{1, 2, 3\}$. Muodosta joukot

   (a) $A \cup B$

   (b) $B \cap \mathbb{Z}$

   (c) $A \setminus C$

   (d) $(A \cup C) \setminus B$

   (e) $A \cup (C \setminus B)$.

   Ratkaisu.

   (a) Yhdiste sisältää molempien joukkojen kaikki alkiot. Siispä $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (b) Koska kaikki joukon B alkiot ovat kokonaislukuja, niin $B \cap \mathbb{Z} = B$.

   (c) Erotuksen määritelmän mukaan joukosta A otetaan pois kaikki joukon C alkiot. Ainoa joukon A alkio, joka ei ole joukon C alkio on 4. Näin ollen $A \setminus C = \{4\}$.

   (d) $A \cup C = A$, joten $(A \cup C) \setminus B = A \setminus B$. Joukon A alkioista ainoastaan alkiot 1 ja 2 eivät kuulu joukkoon B, joten $(A \cup C) \setminus B = A \setminus B = \{1, 2\}$.

   (e) Joukko $C \setminus B = \{1, 2\}$. Nyt kysytty joukko $A \cup (C \setminus B) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\} = A$.

2. Kirjoita seuraavien joukkojen alkiot luettelomuodossa.

   (a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 5\}$

   (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 = 0\}$

   Kirjoita seuraavat joukot muodossa $\{x \mid P(x)\}$, missä $P(x)$ tarkoittaa ehtoa, jonka x toteuttaa.

   (c) $\{3, 4, 5, 6\}$

   (d) $\{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$

Ratkaisu. (Huomaa, että usein joukko voidaan ehtomerkinnällä ilmaista useammalla eri tavalla.)

(a) Joukon alkioita ovat kaikki ne kokonaisluvut, jotka ovat suurempia tai yhtäsuuria kuin -2 ja pienempiä kuin 5. Näin ollen joukko $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

(b) Yhtälön $x^2 + 2x + 1 = 0$ ainoa reaalinen ratkaisu on $x = -1$, joten joukko $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 = 0\} = \{-1\}$.

(c) Joukon alkiot ovat luonnollisia lukuja lukujen 2 ja 7 välissä. Siispä joukko $\{3, 4, 5, 6\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$.

(d) Oletettavasti joukko sisältää ne luvun 2 potenssit, joissa exponentti on luonnollinen luku. Voidaan siis merkitä $\{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\} = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2^n, \text{ missä } n \in \mathbb{N} \text{ ja } n \neq 0\}$.

3. (a) Olkoon $A = \{1, 4, 6\}$. Määritä potenssijoukko $\mathcal{P}(A)$.

   (b) Olkoon $B = \{2, \{3\}, 5\}$. Määritä potenssijoukko $\mathcal{P}(B)$.

   (c) Jos joukossa X on n alkiota, niin kuinka monta alkiota on potenssijoukossa $\mathcal{P}(X)$?

   Ratkaisu.

   (a) Joukon A osajoukot ovat $\{\}, \{1\}, \{4\}, \{6\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{4, 6\}$ ja $\{1, 4, 6\}$. Näin ollen joukon A potenssijoukko on

$$\mathcal{P}(A) = \{\{\}, \{1\}, \{4\}, \{6\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{4, 6\}, \{1, 4, 6\}\}.$$

   (b) Joukon B osajoukot ovat $\{\}, \{2\}, \{\{3\}\}, \{5\}, \{2, \{3\}\}, \{2, 5\}, \{\{3\}, 5\}$ ja $\{2, \{3\}, 5\}$. Näin ollen joukon B potenssikoukko on

$$\mathcal{P}(B) = \{\{\}, \{2\}, \{\{3\}\}, \{5\}, \{2, \{3\}\}, \{2, 5\}, \{\{3\}, 5\}, \{2, \{3\}, 5\}\}.$$

   (c) Jokainen joukon X osajoukko A voidaan määrittää yksikäsitteisesti sen mukaan, mitä alkioita se sisältää joukosta X. Jokaisen alkion kohdalla on kaksi vaihtoehtoa: joko alkio kuuluu tai ei kuulu osajoukkoon A. n-alkioisessa joukossa X näitä erilaisia vaihtoehtojen yhdistelmiä on 2^n kappaletta. Näin ollen joukolla X on 2^n eri osajoukkoa eli mahdollisia potenssijoukon alkioita.

4. Olkoon X perusjoukko ja A, B sekä C joukon X osajoukkoja. Osoita, että

$$(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c.$$

Piirrä tilanteesta myös Vennin diagrammi. Muista, että kaksi joukkoa voidaan osoittaa samaksi osoittamalla, että molemmat joukot ovat toistensa osajoukkoja.

Ratkaisu. Osoitetaan jokot samoiksi osoittamalla ne toistensa osajoukoiksi.

1. "$\subset$" Oletetaan, että $x \in (A \cap B \cap C)^c$. Tällöin alkio x ei voi kuulua kaikkiin joukkoihin A, B tai C, sillä muuten se kuuluisi niiden leikkaukseen. Siispä $x \notin A$ tai $x \notin B$ tai $x \notin C$. Jos $x \notin A$, niin $x \in A^c$. Tällöin $x \in A^c \cup B^c \cup C^c$. Jos $x \notin B$, niin $x \in B^c$. Tällöin $x \in A^c \cup B^c \cup C^c$. Jos $x \notin C$, niin $x \in C^c$. Tällöin $x \in A^c \cup B^c \cup C^c$. Siispä kaikissa tapausksissa $x \in A^c \cup B^c \cup C^c$, ja näin ollen $(A \cap B \cap C)^c \subset A^c \cup B^c \cup C^c$.
2. "$\supset$" Oletetaan, että $x \in A^c \cup B^c \cup C^c$. Tällöin $x \in A^c$ tai $x \in B^c$ tai $x \in C^c$. Jos $x \in A^c$, niin $x \notin A$. Tällöin $x \notin A \cap B \cap C$, joten $x \in (A \cap B \cap C)^c$. Vastaava päättely pätee myös, jos $x \in B^c$ tai $x \in C^c$. Näin ollen kaikissa tapauksissa $x \in (A \cap B \cap C)^c$, joten $A^c \cup B^c \cup C^c \subset (A \cap B \cap C)^c$.

Koska $(A \cap B \cap C)^c \subset A^c \cup B^c \cup C^c$ ja $A^c \cup B^c \cup C^c \subset (A \cap B \cap C)^c$, niin välttämättä $A^c \cup B^c \cup C^c = (A \cap B \cap C)^c$.

5. Keksi sellainen kuvaus, joka

   (a) on injektio

   (b) on surjektio mutta ei injektio

   (c) on bijektio

   (d) Keksi myös jokin kuvauksen tapainen esitys, joka ei kuitenkaan täytä kuvauksen määritelmää.

   Käytä muita kuin tehtävässä 6 tarkasteltuja kuvauksia. Muista perustelut.

   Ratkaisu. Ratkaisuvaihtoehtoja on luonnollisesti useita. Kuvauksen voi määritellä sekä nuolikaavioilla että polynomifunktioina, kunhan muistaa seuraavat asiat: Injektiossa kaikki lähtöjoukon alkiot kuvautuvat **eri** maalijoukon alkioille. Surjektiossa **kaikille** maalijoukon alkioille kuvautuu jokin lähtöjoukon alkio. Bijektio on kuvaus, joka on sekä injektio että surjektio. Kuvauksen tapaisen esityksen saa poikkeamalla kuvauksen määritelmästä, jonka mukaan kuvaus liittää **jokaiseen** lähtöjoukon alkioon **täsmälleen yhden** maalijoukon alkion.

6. Piirrä seuraavat kuvaukset koordinaatistoon. Perustele kuvan avulla, ovatko kuvaukset injektioita, surjektioita tai bijektioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = x$

   (b) $f(x) = x^2$

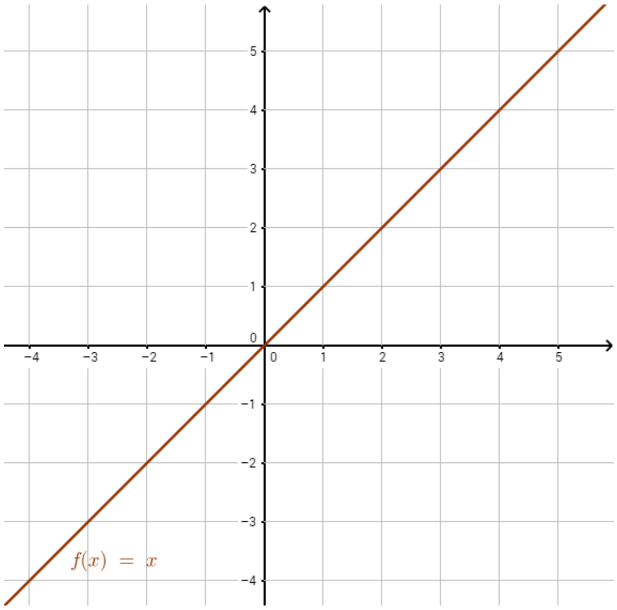
   (c) $f(x) = 2x$

   (d) $f(x) = x - 1$

   (e) $f(x) = \begin{cases} x & \text{jos } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{jos } x < 0. \end{cases}$

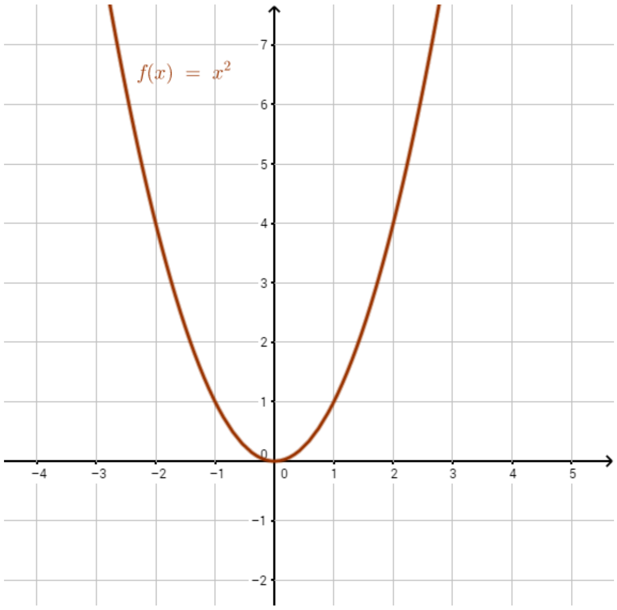
   Ratkaisu. Koordinaatistossa x-akselilla on lähtöjoukon alkiot ja y-akselilla maalijoukon alkiot. Kuvaukset voidaan piirtää esimerkiksi laskemalla funktion arvoja muutamilla eri lähtöarvoilla ja sijoittamalla nämä pisteet koordinaatistoon. Piirtämistä helpottaa, jos muistaa, että 1. asteen polynomifunktion kuvaaja on suora, ja 2. asteen polynomifunktion kuvaaja paraabeli.

   (a) Kuvaus on injektio, sillä oletuksesta $f(x) = f(y)$ seuraa, että $x = y$. Tällöin kaikki lähtöjoukon alkiot kuvautuvat eri maalijoukon alkioille. Tämä nähdään kuvasta esimerkiksi tarkastelemalla $x-$akselin suuntaisia suoria: kuvaaja ei leikkaa tällaisia suoria missään kohdassa kahta kertaa. Kuvaus on myös surjektio, sillä kaikille maalijoukon alkioille $f(x)$ kuvautuu lähtöjoukon alkio x. Kuvassa tämä nähdään tarkastelemalla taas $x-$akselin suuntaisia suoria: kuvaaja leikkaa tällaiset suorat joka kohdassa ainakin kerran. Koska kuvaus on sekä injektio että surjektio, se on bijektio.



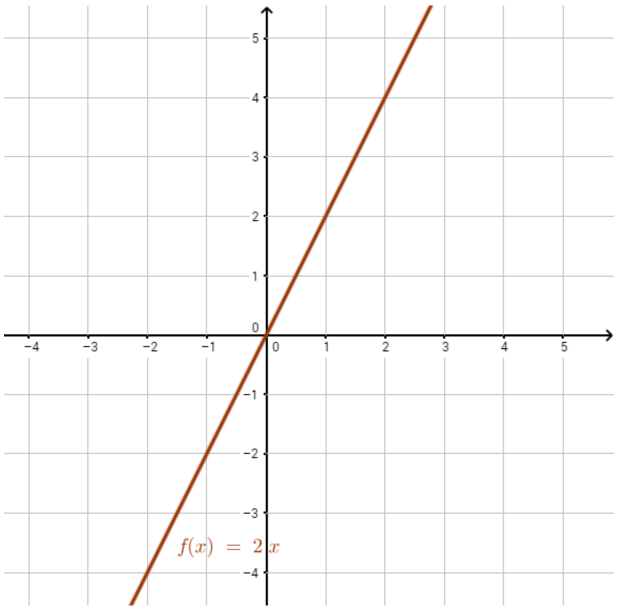
Kuva 1: Funktion $f(x) = x$ kuvaaja.

(b) Kuvaus ei ole injektio, sillä positiivisille reaaliluvuille kuvautuu aina kaksi lähtöjoukon alkiota (esimerkiksi $f(1) = 1^2 = 1$ ja $f(-1) = (-1)^2 = 1$). Kuvaus ei myöskään ole surjektio, sillä negatiivisille reaaliluvuille ei kuvaudu mitään, ts. ei ole olemassa esimerkiksi sellaista lähtöjoukon alkiota x, jolle pätisi $f(x) = -2$.

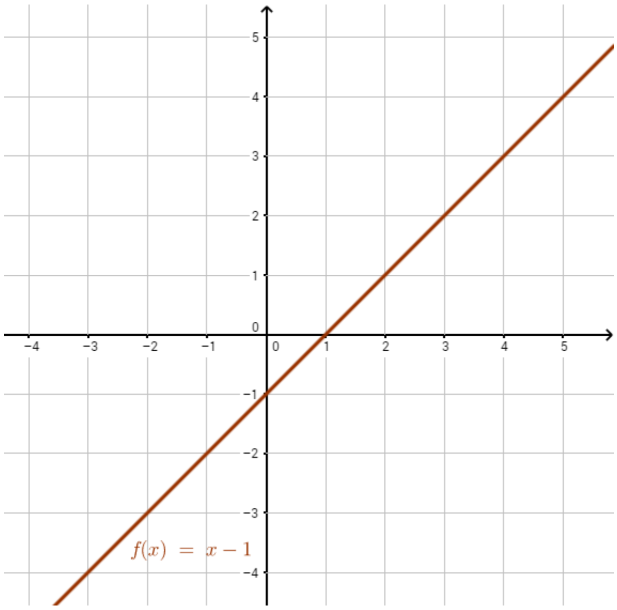


Kuva 2: Funktion $f(x) = x^2$ kuvaaja.

(c) Kuvaus $f(x) = 2x$ on bijektio (selitys kuten a-kohdassa).



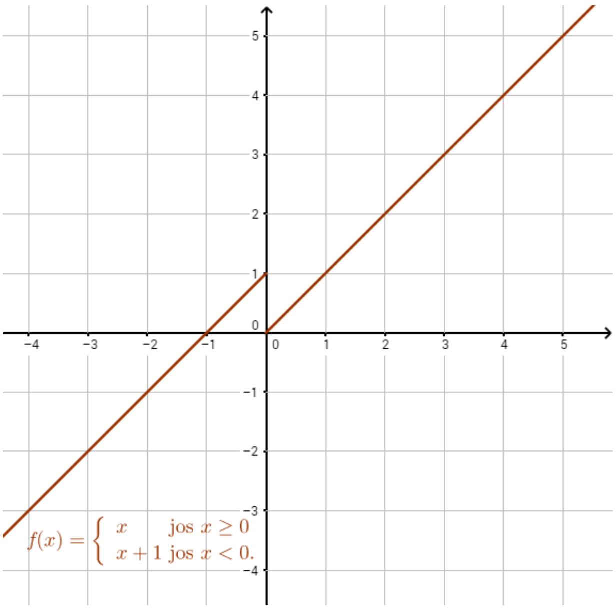
Kuva 3: Funktion $f(x) = 2x$ kuvaaja.



Kuva 4: Funktion $f(x) = x - 1$ kuvaaja.

(d) Kuvaus $f(x) = x - 1$ on bijektio (selitys kuten a-kohdassa).

(e) Kuvaus on surjektio, sillä kaikille maalijoukon alkioille kuvautuu jokin lähtöjoukon alkio (selitys kuten kohdassa a). Kuvaus ei kuitenkaan ole injektio, sillä maalijoukon alkioille välillä $[0, 1[$ kuvautuu kaksi lähtöjoukon alkiota (esimerkiksi $f(-1) = f(0) = 0$). Näin ollen kuvaus ei ole bijektio.



Kuva 5: Paloittain määritellyn funktion f kuvaaja.