Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka tutuksi
Kesä 2015
Harjoitus 1 (ke 12.8.2015)
Ratkaisut (JLa)

1. Sievennä seuraavat lausekkeet. Mihin joukoista $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ ne kuuluvat?

   (a) $3 + 0 \cdot \sqrt{2}$

   (b) $(3-8)/(6-4)$

   (c) $3/2 + 9/3$

   (d) $-11 + 3 \cdot \sqrt{49}$

   (e) $1/2 \cdot \sqrt{2}$

   (f) $2i + 1$

   Ratkaisu.

   (a) $3 + 0 \cdot \sqrt{2} = 3 \in \mathbb{N}$

   (b) $(3-8)/(6-4) = -5/2 \in \mathbb{Q}$

   (c) $3/2 + 9/3 = 9/6 + 18/6 = 27/6 \in \mathbb{Q}$

   (d) $-11+3\cdot\sqrt{49} = -11+\sqrt{9 \cdot 49} = -11+\sqrt{441} = -11+21 = 10 \in \mathbb{N}$

   (e) $1/2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

   (f) Luku $2i+1$ on kompleksiluku (merk. $\mathbb{C}$). Se ei siis kuulu mihinkään mainituista lukujoukoista.

2. Muunna seuraavat luvut kymmenjärjestelmään.

   (a) 110_2

   (b) 125_6

   (c) 134_8

   (d) $F3A5_{16}$

   Ratkaisu.

   (a) $110_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 1 + 0 + 5_{10}$

   (b) $125_6 = 1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0 = 36 + 12 + 5 = 53_{10}$

   (c) $134_8 = 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 64 + 24 + 4 = 92_{10}$

(d) Heksadesimaalijärjestelmässä kirjain A tarkoittaa lukua 10 ja kirjain F lukua 15. Siispä

$$\begin{aligned} F3A5_{16} &= 15 \cdot 16^3 + 3 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 \\ &= 61\ 440 + 768 + 160 + 5 = 62\ 373. \end{aligned}$$

3. Muunna luku 262_{10}

   (a) binäärijärjestelmään

   (b) 5-järjestelmään

   (c) heksadesimaalijärjestelmään.

   Ratkaisu.

   (a) $262_{10} = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
   $= 100000110_2$.

   (b) $262_{10} = 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 2022_5$.

   (c) $262_{10} = 1 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = 106_{16}$.

4. Määritelmä: *Luku a on rationaaliluku, jos on olemassa kokonaisluvut m ja n, $n \neq 0$, joilla*

$$a = \frac{m}{n}.$$

   Osoita määritelmän avulla, että **jos** luvut a ja b ovat rationaalilukuja, **niin** myös niiden tulo $a \cdot b$ on rationaaliluku.

   Ratkaisu. Olkoot luvut s ja t rationaalilukuja. Rationaalilukujen määritelmän perusteella tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa sellaiset kokonaisluvut k, l, m ja n, $l \neq 0$, $n \neq 0$, että

$$s = \frac{k}{l} \text{ ja } t = \frac{m}{n}.$$

   Tutkitaan sitten rationaalilukujen s ja t tuloa. Huomataan, että

$$s \cdot t = \frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n} = \frac{km}{ln}.$$

   Koska luvut k ja m ovat kokonaislukuja, niin myös niiden tulo km on kokonaisluku. Vastaavasti koska luvut l ja n ovat kokonaislukuja, niin myös tulo ln on kokonaisluku. Lisäksi $ln \neq 0$, sillä $n \neq 0$ ja $n \neq 0$ (tulon nollasääntö). Näin ollen luku $s \cdot t$ voidaan ilmaista kahden kokonaisluvun osamääränä, jonka lisäksi nimittäjä ei nolla, joten se on määritelmän nojalla rationaaliluku.

5. Ratkaise seuraavat ensimmäisen asteen yhtälöt.

(a)
$$\frac{5}{2}x - 5 = \frac{1}{2}x + 1$$

(b)
$$\frac{2+a}{a} = \frac{5}{11}$$

(c)
$$4x + \frac{2+x}{7} = \frac{1-x}{2} + 3$$

Ratkaisu.

(a)

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{2}x - 5 = \frac{1}{2}x + 1\\
\Rightarrow\ &\frac{5}{2}x - 5 + 5 = \frac{1}{2}x + 1 + 5\\
\Rightarrow\ &\frac{5}{2}x = \frac{1}{2}x + 6\\
\Rightarrow\ &\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x + 6 - \frac{1}{2}x\\
\Rightarrow\ &\frac{4}{2}x = 6\\
\Rightarrow\ &2x = 6\\
\Rightarrow\ &x = \frac{6}{2} = 3.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\frac{2+a}{a} = \frac{5}{11}\\
\Rightarrow\ &5a = 11(2+a)\\
\Rightarrow\ &5a = 22 + 11a\\
\Rightarrow\ &6a = -22\\
\Rightarrow\ &a = -\frac{22}{6} = -\frac{11}{3}
\end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
&4x+\frac{2+x}{7}=\frac{1-x}{2}+3\\
&\Rightarrow \frac{7\cdot 4x}{7}+\frac{2+x}{7}=\frac{1-x}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}\\
&\Rightarrow \frac{7\cdot 4x+2+x}{7}=\frac{1-x+2\cdot 3}{2}\\
&\Rightarrow \frac{29x+2}{7}=\frac{7-x}{2}\\
&\Rightarrow 7(7-x)=2(29x+2)\\
&\Rightarrow 49-7x=58x+4\\
&\Rightarrow 45=65x\\
&\Rightarrow x=\frac{45}{65}=\frac{9}{13}.
\end{aligned}
$$

6. Marja-Liisa hiihtää rullasuksilla vakionopeutta, jolla 14 kilometrin lenkkiin menee 51 minuuttia. Kuinka paljon Marja-Liisalla menee aikaa, kun hän seuraavana päivänä päättääkin hiihtää samalla nopeudella 10 kilometriä pidemmän lenkin?

   (a) Mitkä ovat tehtävänannon kaksi suuretta, joiden arvoja ei tiedetä?

   (b) Muunna tehtävänannossa oleva tieto yhtälöiksi, ratkaise yhtälöt ja vastaa tehtävän kysymykseen.
   (*Vinkki. Miten nopeus riippuu kuljetusta matkasta ja siihen käytetystä ajasta?*)

   Ratkaisu.

   (a) Tuntemattomia ovat sekä Marja-Liisan nopeus että seuraavan päivän lenkkiin menevä aika.

   (b) Muistetaan fysiikasta, että vakionopeus saadaan jakamalla kuljettu matka siihen käytetyllä ajalla. Toisin sanoen

   $$v=\frac{s}{t},$$

   missä v on nopeus, s matka ja t aika. Merkitään Marja-Liisan nopeutta ensimmäisenä päivänä v_1 ja toisena päivänä v_2. Koska Marja-Liisan nopeus on molempina päivinä sama, voidaan nämä merkitä yhtä suuriksi: tiedetään siis, että $v_1 = v_2$.

Ensimmäisenä päivänä Marja-Liisa hiihti 14 kilometriä 51 minuutissa. Näin ollen

$$v_1 = \frac{14\ km}{51\ min}.$$

Seuraavana päivänä Marja-Liisa hiihti $14 + 10 = 24$ kilometriä. Siispä

$$v_2 = \frac{24\ km}{t},$$

missä t on toisen päivän lenkkiin kulunut aika. Yhtälö $v_1 = v_2$ saadaan siis muotoon

$$\frac{14\ km}{51\ min} = \frac{24\ km}{t}.$$

Ratkaistaan tästä kysytty muuttuja t. Kerrotaan ensin yhtälön molemmat puolet luvulla 51, jolloin

$$14\ km = \frac{51\ min \cdot 24\ km}{t}.$$

Kerrotaan sitten yhtälön molemmat puolet muuttujalla t, jolloin yhtälö tulee muotoon

$$t \cdot 14\ km = 51\ min \cdot 24\ km.$$

Jaetaan sitten yhtälön molemmat puolet luvulla 14, jolloin saadaan

$$t = \frac{51\ min \cdot 24\ km}{14\ km} \approx 87,43\ min.$$

Näin ollen Marja-Liisalta kului toisen päivän lenkin hiihtämiseen noin 87 minuuttia 26 sekuntia.