Kombinatoriikka
Kesä 2015

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

15. kesäkuuta 2015

Sisältö

Luku 1

Peruskäsitteistö ja perustekniikat

1.1 Järjestysten ja joukkojen lukumäärä

1.1.1 Tapausten yhdistäminen

Aloitetaan tarkastelu tilanteesta, jossa on kaksi joukkoa objekteja, joukot A ja B. Joukossa A on n_1 alkiota, ja joukossa B on n_2 alkiota. Halutaan selvittää, miten monta alkioparia voidaan näistä muodostaa niin, että ensimmäinen alkio kuuluu joukkoon A ja toinen alkio joukkoon B.

Ensimmäiselle alkiolle on n_1 vaihtoehtoa. Toiselle alkiolle on puolestaan n_2 vaihtoehtoa. Jokainen ensimmäisen joukon alkio voidaan yhdistää mihin tahansa toisen joukon alkioon. Jokainen näin muodostettu kombinaatio on erilainen, ja toisaalta, mitään muita kombinaatioita ei ole.

Ensimmäisen joukon A alkion kanssa voidaan siis valita mikä tahansa joukon B alkioista, yhteenstä n_2 vaihtoehtoa. Toisen joukon A alkion kanssa voidaan jälleen valita mikä tahansa joukon B alkioista, eli n_2 vaihtoehtoa. Näin voidaan käydä läpi koko joukko A yhteensä siis saadaan vaihtoehtoja

$$\sum_{a \in A} n_2 = n_1 n_2.$$

Vastaavasti voidaan tarkastella tilannetta, jossa joukossa A_1 on n_1 alkiota, joukossa A_2 on n_2 alkiota, jne, ja joukossa A_k on n_k alkiota. Yhteensä tällöin on sellaisia alkiokombinaatioita, joissa ensimmäinen alkio on joukossa A_1, toinen joukossa A_2, jne, k. alkio joukossa A_k, on

$$n_1 n_2 \cdots n_k$$

kappaletta.

Esimerkki 1. Joukko A koostuu alkioista a, b, c ja joukko B koostuu alkioista $1, 2, 3, 4$. Tarkastellaan nyt miten monta paria voidaan muodostaa siten, että ensimmäinen alkio kuuluu joukkoon A ja toinen alkio joukkoon B.

Edellä annetulla kaavalla vaihtoehtoja on $3 \cdot 4 = 12$, sillä joukossa A on kolme ja joukossa B on neljä alkiota. Voidaan myös luetella kaikki vaihtoehdot:

$$a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4, c1, c2, c3, c4.$$

1.1.2 Jonojen lukumäärä

Tarkastellaan tilannetta, jossa n erilaista objektia halutaan asettaa jonoon. Jonossa on siis merkitystä objektien järjestyksellä.

Jonojen lukumäärä voidaan laskea seuraavasti:

1. Otetaan jokin objekteista (ihan mikä tahansa). Sille on n mahdollista paikkaa jonossa: se voi olla ensimmäinen, toinen, jne, tai vaikka n. jonon jäsen.

2. Otetaan seuraava objekti (jälleen ihan mikä tahansa). Sille on $n - 1$ mahdollista paikkaa jonossa: se saa ihan minkä tahansa muun paikan, paitsi jo vallatun paikan.

3. Otetaan seuraava objekti (jälleen mikä tahansa). Sille on $n - 2$ mahdollista paikkaa jonossa: kaikki muut, paitsi jo täytetyt paikat.

4. Jatketaan samoin. Tyhjien paikkojen määrä vähenee aina yhdellä.

Yhteensä vaihtoehtoja on siis jokaisessa kohdassa käytyjen vaihtoehtojen tulo, eli

$$n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!.$$

Esimerkki 2. Koululuokka, jolla on 29 oppilasta, asettuu jonoon. Erilaisia jonoja on $29! = 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdots 1$ kappaletta.

1.2 Sijoittelujen lukumäärä

Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa n objektia halutaan asettaa m paikalle, missä $m \geq n$. Mikäli $m = n$, on kyseessä jonon muodostaminen. Mikäli $m > n$, muuttuu tilanne hieman. Tarkastellaan ensin esimerkkiä, käsitellään sitten yleinen tapaus.

Esimerkki 3. Oletetaan, että 20 ihmistä on ostanut matkalipun bussiin, paikkalippuja ei ole, ja bussissa on 30 paikkaa. Ensimmäisenä bussiin menevällä on siis 30 vaihtoehtoa istumapaikaksi. Toisena bussiin menevällä on 29 vaihtoehtoa istumapaikaksi (kaikki muut paitsi ensimmäisen jo valtaama tuoli). Kolmantena bussiin menevällä on puolestaan 28 paikkaa, jne. Yhteensä vaihtoehtoja on siis

$$30 \cdot 29 \cdot 28 \cdots 11$$

kappaletta.

Yleisessä tapauksessa ensimmäisellä objektilla on puolestaan m vaihtoehtoa, toisella $m - 1$, kolmannella $m - 2$, jne, ja viimeisellä $m - n + 1$ vaihtoehtoa, yhteensä siis

$$m(m-1)(m-2) \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

1.2.1 Osajoukkojen lukumäärä

Ajatellaan tilannetta, jossa halutaan valita n alkion joukosta k alkion osajoukko. Lasketaan miten monella tavalla tämä voidaan tehdä.

Valitaan ensin k alkiota järjestyksessä.

1. Ensimmäiseksi alkioksi on n vaihtoehtoa.
2. Toiseksi alkioksi on $n-1$ vaihtoehtoa.
3. Kolmanneksi alkioksi on $n-2$ vaihtoehtoa. Näin jatketaan.

Yhteensä vaihtoehtoja on siis $n \cdot (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$. Kuitenkin nyt alkiot on valittu järjestyksessä, ja koska olemme kiinnostuneita vain osajoukkojen lukumäärästä, emme järjestetyistä jonoista, pitää jakaa samojen alkioiden erilaisten järjestysten määrällä.

Tiedämme, että k alkion jonoja on $k!$ kappaletta. Tämä on siis se lukumäärä, jolla pitää jakaa. Yhteensä saadaan

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} := \binom{n}{k}.$$

Esimerkki 4. Liisalla on viisi valkoista palloa ja kolme punaista palloa. Hän haluaa asettaa ne jonoon siten, että mitkään kaksi punaista palloa eivät ole vierekkäin. Miten monella tavalla tämä voidaan tehdä?

Kysymys ei ole ihan normaali rehellinen jononjärjestämistehtävä, sillä osa palloista on keskenään samanlaisia. Lisäksi on lisäehto, että kaksi punaista ei mene vierekkäin. Näin pienellä pallomäärällä voisi päästä aika pitkälle kokeilemallakin, mutta lasketaan tämä kuitenkin hieman toisin: Asetetaan ensin valkoiset pallot riviin. Todetaan sitten, että punainen pallo voi tulla ennen ensimmäistä valkoista, ensimmäisen ja toisen valkoisen väliin, toisen ja kolmannen valkoisen väliin, jne, tai viimeiseksi. Yhteensä paikkoja valkoisille palloille on siis kuusi mahdollista sijoituspaikkaa, mutta mihinkään sijoituspaikkaan ei voida laittaa yli yhtä palloa. Riittää siis valita kuudesta mahdollisesta sijoituspaikasta kolme, ja tiedämme kaikki mahdolliset pallojensijoittelupaikat. Yhteensä vaihtoehtoja on siis

$$\binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 5\cdot 4 = 20$$

kappaletta.

Otetaan seuraavaksikin esimerkiksi hieman epärehellinen jononjärjestys:

Esimerkki 5. Liisalla on viisi valkoista ja viisi punaista helmeä. Miten monella tavalla hän voi muodostaa niistä erilaisen jonon? Nyt oleellista on se, että valkoiset helmet ovat keskenään samanlaisia, samoin punaiset helmet, eli tehtävää ei voi vain ratkaista laskemalla miten monella tavalla kymmenen erilaista objektia voidaan järjestää. Sen sijaan voidaan toimia seuraavasti: Ajatellaan, että helminauhassa (helmijonossa) on kymmenen paikkaa.

Niistä viisi varataan valkoisille helmille ja loput punaisille. Riittää siis vain valita valkoisten helmien paikat. Kyseessä on siis viiden alkion osajoukon valinta kymmenestä alkiosta. Tämä voidaan tehdää

$$\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$$

vaihtoehtoa.

1.3 Potenssien aukikertominen ja binomikertoimet

Tarkastellaan lausekkeen $(a + b)^n$ aukikertomista. Helposti voi nähdä, että termit ovat muotoa $a^k b^{n-k}$, mutta kuinka monta minkäkinlaista termiä on?

Tarkastellaan aluksi lauseketta

$$(a + b)(a + b)(a + b) \cdots (a + b).$$

Termi $a^k b^{n-k}$ muodostuu, kun ylläolevassa tulossa k tulontekijästä otetaan a ja lopuista b. Riittää siis valita ne k tulontekijääm joista valitaan a. Kyseessä on siis osajoukon valinta. Halutaan valita k tulontekijää yhteensä n tulontekijästä. Tämä voidaan tehdä

$$\binom{n}{k}$$

tavalla.

Yhteensä siis saadaan

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Esimerkki 6. Lasketaan n alkion joukon potenssijoukon koko. Potenssijoukko muodostuu kaikista osajoukoista. Tiedämme, että k alkion osajoukkoja on

$$\binom{n}{k}$$

kappaletta. Osajoukon koko voi olla $0 \leq k \leq n$. Yhteensä siis haluamme laskea summan

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n.$$

1.3.1 Möbiuksen funktion arvojen summa

Möbiuksen funktio on lukuteoriassa hyvin tärkeä funktio, joka on määritelty seuraavasti: $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$, kun p on alkuluku, $\mu(p^k) = 0$, kun $k \geq 2$ ja $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$, kun luvuilla m ja n ei ole yhteisiä tekijöitä (paitsi luku yksi). Siispä $\mu(1) = 1, \mu(2) = -1, \mu(3) = -1, \mu(4) = 0, \mu(5) = -1, \mu(6) = 1$, jne.

Funktio toteuttaa seuraavan kauniin kaavan

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{kun } n = 1 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Merkintä $d \mid n$ tarkoittaa, että luku d jakaa luvun n. Esimerkiksi siis luvut $1, 2, 3$ ja 6 jakavat luvun 6. Todistetaan nyt tämä kaava. Koska $\mu(1) = 1$, pätee $\sum_{d|1} \mu(d) = 1$. Kun $n > 1$, kirjoitetaan $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, missä luvut $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ovat keskenään erisuuria alkulukuja. Koska $\mu(d) = 0$, mikäli luku d on jaollinen jonkin alkuluvun jollain ykköstä suuremmalla potenssilla, pätee

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|p_1 p_2 \cdots p_k} \mu(d).$$

Huomataan nyt, että luvuista $p_1, p_2, \ldots, p_k$ voidaan muodostaa $\binom{k}{\ell}$ lukua, jotka muodostuvat ℓ alkuluvun tulona. Näille luvuille d pätee $\mu(d) = (-1)^\ell$. Siispä

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|p_1 p_2 \cdots p_k} \mu(d) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^\ell = 0.$$

1.4 Kyyhkyslakkaperiaate

Kyyhkyslakkaperiaate on lähtökohdaltaan hyvin yksinkertainen: $n + 1$ kyyhkystä menee n pesään. Siispä vähintään yhdessä pesässä on oltava vähintään 2 kyyhkystä.

Yleisemmin tilanne voidaan muotoilla seuraavasti: $nk + 1$ objektia asetetaan n astiaan. Vähintään yhteen astiaan menee $k + 1$ objektia.

Vaikka periaate on yksinkertainen, saadaan sillä kuitenkin todistettua monia jännittäviä asioita.

Esimerkki 7. On annettu $n + 1$ lukua joukosta $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Näistä annetuista luvuista joillekin kahdelle luvulle a ja b pätee, että luku b on jaollinen luvulla a. Tämä voidaan todistaa seuraavasti: Kirjoitetaan kaikki joukon luvut muodossa $2^d h$, missä h on pariton. Koska kaikki luvut kuuluvat joukkoon $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, on luvun h kuuluttava joukkoon $\{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$. Tässä joukossa on vain n lukua. Siispä annetun $n+1$ luvun joukossa on pakko olla kaksi lukua, joilla on sama h, ja joiden ainoa ero on luvun 2 potensseissa. Kun valitaan luvuksi b se, jonka kakkosen potenssi on korkeampi, on se väistämättä jaollinen luvulla a.

Tarkastellaan nyt seuraavaa esimerkkiä, jossa järjestetään luvut uudestaan ja muodostetaan sen jälkeen tulo:

Esimerkki 8. Lukujen järjestystä kutsutaan permutaatioksi. Olkoon π jokin lukujen $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ permutaatio, eli bijektio joukolta itselleen. Olkoon luku n pariton. Väitetään, että tulo

$$\prod_{j=1}^{n} (a_j - \pi(a_j))$$

on parillinen. Tehdään vastaoletus: tulo on pariton. Huomataan aluksi, että tulo voi olla pariton jos ja vain jos kaikki tulontekijät $(a_j - \pi(a_j))$ ovat parittomia. Jos siis a_j on pariton, pitää luvun $\pi(a_j)$ olla parillinen ja päinvastoin. Täten lukujen $\pi(a_j)$ joukossa pitää olla sama määrä parillisia lukuja kuin lukujen a_j joukossa on parittomia, ja sama määrä parittomia lukuja kuin lukujen a_j joukossa on parillisia. Koska luvut $\pi(a_j)$ ja luvut a_j ovat jossain järjestyksessä samat luvut, on niillä oltava sama määrä parillisia ja parittomia lukuja keskenään. Täten myös lukujen a_j joukossa on oltava yhtä monta parillista ja paritonta lukua.. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä lukuja a_j on pariton määrä.

1.4.1 Rationaaliapproksimaatiot

Osoitetaan seuraavaksi Dirichlet's approksimointilause, joka on tärkeä periaate lukuteoriassa, ja joka saadaan todistettua mukavasti kyyhkyslakkaperiaatteen avulla.

Esimerkki 9 (Dirichlet'n approksimointilause)**.** Olkoon α mielivaltainen reaaliluku. On olemassa rationaaliluku $\frac{r}{s}$, jolla

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{s^2}.$$

Väite on selvä, jos α itse on rationaalinen, sillä tällöin luvuksi $\frac{r}{s}$ voidaan valita luku α itse. Oletetaan siis, että α ei ole rationaalinen, eli sitä ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Tarkastellaan lukuja αj, missä $1 \leq j \leq n+1$, ja n on mielivaltainen kokonaisluku. Nämä luvut voidaan kirjoittaa muodossa

$$\alpha j = \lfloor \alpha j \rfloor + \{\alpha j\},$$

missä $\lfloor \cdot \rfloor$ tarkoittaa alaspäin pyöristämistä ja $\{\cdot\}$ murto-osaa. Kaikki murto-osat $\{\alpha j\}$ ovat välillä $(0,1)$, ja mitkään kaksi niistä ei voi olla samoja, sillä jos jotkin kaksi $\{\alpha j_1\}$ ja $\{\alpha j_2\}$ olisivat samoja, niin luku $(j_1 - j_2)\alpha$ olisi kokonaisluku, eli α olisi rationaalinen. Yksikkö-väli voidaan jakaa n osajoukkoon: $(0, \frac{1}{n}], (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \ldots, (\frac{n-1}{n}, 1)$. Jossain näistä osajoukoista on pakko olla vähintään kaksi arvoista $\{\alpha j\}$. Valitaan nämä luvun j arvot ja merkitään niitä j' ja j''. Nyt

$$j'\alpha - j''\alpha = \lfloor \alpha j' \rfloor - \lfloor \alpha j'' \rfloor + \{\alpha j'\} - \{\alpha j''\} = Z + z,$$

missä Z on kokonaisluku, ja z murto-osa. Koska $|\{\alpha j'\} - \{\alpha j''\}| < \frac{1}{n}$, voidaan valita $|z| < \frac{1}{n}$. Täten

$$|(j' - j'')\alpha - Z| < \frac{1}{n},$$

joten

$$\left|\alpha - \frac{Z}{j' - j''}\right| < \frac{1}{n|j' - j''|} \leq \frac{1}{(j' - j'')^2}.$$

Tällä samalla tavalla voidaan itse asiassa löytää äärettömän paljon hyviä rationaaliapproksimaatioita, kun vain kasvatetaan lukua n.

1.4.2 Haluttujen ominaisuuksien vaatiminen luvuilta

Kyyhkyslakkaperiaatetta voidaan käyttää myös, jos halutaan esimerkiksi osoittaa, että on olemassa tietynnäköinen luku, jolla on esimerkiksi jokin haluttu jaollisuusominaisuus. Tätä on helpoin kuvata esimerkin avulla.

Esimerkki 10. Olkoon n annettu positiivinen kokonaisluku. Osoitetaan, että on olemassa luku, joka on muotoa $1111\ldots1000\ldots0$ (eli ensin ykkösiä, sitten nollia), ja joka on jaollinen luvulla n.

Jos luku n päättyy nolliin, niin unohdetaan nämä nollat, sillä ne voidaan helposti käsitellä lisäämällä konstruoitavan luvun perään riittävä määrä nollia (eli esimerkiksi, koska luku 110 on jaollinen luvulla 22, niin luvulla 2200 jaollinen luku on vaikkapa 11000.

Lisäksi, jos luku n on parillinen, niin kirjoitetaan se muodossa $2^d h$, missä h on pariton, sillä mikäli jokin luku $11\ldots100\ldots0$ on jaollinen luvulla h, niin luku, joka saadaan kertomalla edellinen luku luvulla 10^d on varmasti jaollinen luvulla $2^d h$.

Riittää siis osoittaa, että on olemassa vaaditunlainen luku, joka on jaollinen luvulla h. Luvut, jotka ovat muotoa $11\ldots1$ ovat kirjoitettavissa muodossa $\frac{10^k-1}{9}$. Kun $k > h$, on selvää, että joillakin kahdella tällaisella luvulla on pakko olla keskenään sama jakojäännös luvulla h jaettaessa. Näiden lukujen erotus on muotoa $11\ldots100\ldots0$, ja lisäksi luvulla h jaollinen. Todistus on valmis.

1.5 Inkluusio-ekskluusioperiaate

Inkluusio-ekskluusioperiaatteen, eli seulaperiaatteen idea on se, että kun lasketaan miten monta lukua jossain joukossa on, lasketaan ensin sopivien osajoukkojen lukujen lukumäärät, summataan ne yhteen, vähennetään niiden lukujoukkojen lukujen lukumäärä, joiden luvut tuli lisättyä vähintään kahdesti, lisätään niiden lukujoukkojen lukujen määrä, joiden luvut tuli poistettua vähintään kahdesti, jne. Jokaisella kierroksella pyritään siis korjaamaan edellisen kierroksen virhe, ja näin jatketaan, kunnes tulee virheetön kierros.

Ylläolevaa hieman epämääräistä selitystä on helpoin havainnollistaa esimerkillä.

Esimerkki 11. Haluamme määrittää ne positiviiset kokonaisluvut, joiden suuruus on korkeintaan 30, ja jotka ovat jaollisia kahdella, kolmella tai viidellä.

Kahdella jaollisia lukuja on 15 kappaletta. Kolmella jaollisia on 10 ja viidellä jaollisia 6. Yhteensä näitä on siis 31. Nyt on jo selvää, että jotain on laskettu väärin, koska korkeintaan luvun 30 suuruisia positiivisia kokonaislukuja ei ole 31 kappaletta vaan vähemmän. Olemme laskeneet kahdesti ne luvut, jotka ovat jaollisia täsmälleen kahdella luvuista $2, 3$ ja 5. Lisäksi olemme laskeneet kolmesti ne luvut, jotka ovat jaollisia kaikilla luvuista $2, 3, 5$.

Poistetaan nyt luvut, jotka on sekä kahdella että kolmella jaollisia, eli kuudella jaollisia. Näitä on 5 kappaletta. Poistetaan myös ne luvut, jotka on kahdella ja viidellä, eli kymmenellä jaollisia. Näitä on 3 kappaletta. Poistetaan vielä ne luvut, jotka ovat kolmella ja viidellä, eli viidellätoista jaollisia. Näitä on 2 kappaletta. Poistetaan siis yhteensä 10 lukua. Poiston jälkeen jäljellä on 21 lukua. Kuitenkin kahdella, kolmella ja viidellä jaollinen luku, eli luku 30 poistettiin kolmesti (ja se oli aiemmin lisättynä kolmesti), joten nyt se pitää lisätä vielä kerran.

Yhteensä kahdella, kolmella tai viidellä jaollisia lukuja on siis 22. Nämä ovat

$$2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30.$$

1.5.1 Teoria periaatteen takana

Inkluusio-ekskluusioperiaate perustuu seuraavaan identiteettiin:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1.1}$$

Todistetaan nyt tästä yleinen versio:

Lause 12. *Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n$ joukkoja. Nyt*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} |A_j| - \sum_{j<\ell} |A_j \cap A_\ell| + \sum_{j<\ell<m} |A_j \cap A_\ell \cap A_m| \\ - \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Todistus. Todistetaan lause varmistamalla, että jokainen joukon $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ piste tulee laskettua täsmälleen kerran.

Oletetaan, että $x \in A_1, \ldots, A_k$ ja $x \neq\in A_{k+1}, \ldots A_n$. Tällöin alkiota x ei tule laskettua kertaakaan missään sellaisessa joukossa, joka on muotoa

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\ell} \cap A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_m},$$

missä $i_1 \ldots i_\ell \in 1, \ldots, k$ ja $j_1, \ldots j_m \in k+1, \ldots n$, ja jälkimmäinen joukko on epätyhjä, ja ensimmäinen mahdollisesti tyhjä. Alkio x tulee siis laskettua vain joukoissa muotoa

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\ell},$$

missä $i_1 \ldots i_\ell \in 1, \ldots, k$. Piste on laskettu yhtälön vasemmalle puolelle kerran. Määritetään seuraavaksi miten monta kertaa piste on laskettu oikealle puolelle.

Summaan $\sum_{j=1}^{n} |A_k|$ piste on laskettu k kertaa. Summaan $\sum_{j<\ell} |A_j \cap A_\ell|$ piste on laskettu $\binom{k}{2}$ kertaa, summaan $\sum_{j<\ell<m} |A_j \cap A_\ell \cap A_m|$ se on laskettu $\binom{k}{3}$ kertaa, ja niin edelleen. Joka toisen edessä on miinus. Siispä termi on laskettu

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - + \cdots (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = 1 - 1 + k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - + \cdots (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = 1 - (1-1)^k = 1.$$

Piste on siis laskettu tasan kerran myös yhtälön oikealle puolelle. □

1.5.2 Epäjärjestysten määrä

Sellaista järjestystä, jossa jokainen alkio vaihtaa paikkaansa kutsutaan epäjärjestykseksi. Esimerkiksi alkioiden a_1, a_2, a, a_3 eräs epäjärjestys voisi olla a_3, a_1, a_2. Määritetään nyt epäjärjestysten määrä inkluusio-ekskluusioperiaatteen avulla.

Alkioiden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kaikkien järjestysten määrä on $n!$. Tästä on poistettava kaikkien sellaisten kuvausten määrä, jotka pitävät edes yhden pisteen paikallaan.

Lasketaan nyt sellaisten järjestysten määrä, joissa alkio a_1 pysyy paikallaan. Näitä on $(n-1)!$ verran (koska kaikki muut vaihtavat paikkaa). Samoin voidaan laskea myös muut alkiot paikallaan pitävien järjestysten määrä. Koska alkioita on n kappaletta, on näitä kuvauksia yhteensä $n \cdot (n-1)! = n!$ kappaletta.

Nyt on kuitenkin poistettu moneen kertaa esimerkiksi ne kuvaukset, jotka pitävät alkiot a_1 ja a_2 paikoillaan. Kahden alkion paikallaan pitäviä kuvauksia on kullekin alkioparille $(n-2)!$, ja alkiopareja on $\binom{n}{2}$, joten tällaisia kuvauksia on yhteensä $\frac{n!}{2!}$.

Näin jatketaan. Lopulta saadaan epäjärjestysten määräksi

$$n!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

1.5.3 Lisää esimerkkejä

Esimerkki 13. Hississä on kuusi ihmistä. Lasketaan miten monella tavalla he voivat poistua neljässä kerroksessa, jos jokaisessa kerroksessa poistuu vähintään yksi ihminen.

Jokaisella on neljä kerrosvaihtoa. Yhteensä henkilöt voivat siis poistua hissistä 4^6 eri tavalla.

Poistetaan nyt ne tapaukset, joissa kukaan ei ole poistunut ensimmäisessä kerroksessa. Tällöin jokaisella on 3^6 vaihtoehtoa. Vastaavasti voidaan laskea kaikille muillekin kerroksille. Tällaisia tapauksia on siis yhteensä $4 \cdot 3^6$ (kerrosten lukumäärä kerrottuna niiden vaihtoehtojen lukumäärällä, joissa kukaan ei poistu kyseisessä kerroksessa).

Olemme kuitenkin poistaneet liian monta kertaa ne tilanteet, joissa joissakin kahdessa kerroksessa ei ole poistunut ketään. Tällöin kaikki ovat poistuneet kahdessa muussa kerroksessa, eli yhteensä 2^6 vaihtoehtoa poistumisille kutakin kahta kerrosta kohden. Kahden kerroksen osajoukkoja on neljästä kerroksesta $\binom{4}{2}$.

Lopulta pitää vielä huomioida ne tapaukset, joissa kaikki ovat poistuneet samassa kerroksessa. Tämä on voinut tapahtua missä tahansa neljästä kerroksesta, ja tällöin vaihtoehtoja on ollut $1^6 = 1$ kerrosta kohden.

Yhteensä siis on voitu poistua hissista niin, että kaikissa kerroksissa joku on poistunut

$$4^6 - 4 \cdot 3^6 + \binom{4}{2} \cdot 2^6 - 4 \cdot 1 = 1560$$

tavalla.

Esimerkki 14. Viisi firmaa auditoidaan yhtä aikaa. Auditoijia on kahdeksan kappaletta. Miten monella tavalla auditoijat voidaan jakaa firmoille?

Koska auditoinnin pitää tapahtua yhtä aikaa, pitää jokaiselle firmalle löytyä auditoija, ja lisäksi yksikään auditoija ei voi käsitellä yli yhtä firmaa kerrallaan. Yhdellä firmalla voi kuitenkin olla monta auditoijaa.

Lasketaan ensin kaikkien mahdollisten auditointimahdollisuuksien määrä. Jokainen auditoija voi valita minkä tahansa firman, eli jokaisella auditoijalla on viisi vaihtoehtoa. Yhteensä siis 5^8.

Nyt on kuitenkin laskettu myös ne tapaukset, joissa osaa firmoista ei auditoi kukaan. Poistetaan nämä. Sellaisia tapauksia, joissa kukaan ei auditoi jotain annettua firmaa on 4^8. Firmoja on viisi, ja tämä voi tapahtua minkä tahansa firman kohdalla. Yhteensä mahdollisuuksia on $5 \cdot 4^8$.

Nyt on poistettu moneen kertaan ne tapaukset, joissa kukaan ei auditoi esimerkiksi kahta firmaa. Mille tahansa kahden firman parille tämä voi tapahtua 3^8 kertaa (eli kukin auditoija valitsee lopuista kolmesta). Kahden firman pareja on $\binom{5}{2}$.

Jatketaan näin ja saadaan

$$5^8 - 5 \cdot 4^8 + \binom{5}{2} 3^8 - \binom{5}{3} 2^8 + 5 \cdot 1$$

Luku 2

Väritykset apuna erilaisissa tehtävissä

2.1 Värityksistä ylipäätään

Värityksiä voidaan käyttää useiden tehtävien ratkaisemisessa. Erilaisia asioita voidaan havainnollistaa vaikkapa verkkojen särmiä värittämällä. (Tästä on esimerkki monisteessa.) Lisäksi niitä voidaan käyttää myös esimerkiksi osoittamaan, että jotain pintaa ei voida laatoittaa tietynlaisilla kuvioilla. Ennen kaikkea tämäntyyppisiin ongelmiin keskitytään tällä kurssilla.

Värityksiä on myös tutkittu. Kuuluisan neliväriongelman mukaan mikä tahansa tasokartta voidaan värittää neljällä värillä niin, että mitkään kaksi vierekkäin olevaa aluetta eivät ole saman väriset. Ongelma ratkaistiin viidelle värille (eli viisi väriä riittää) jo 1800-luvulla. Kempe julkaisi todistuksen, jonka mukaan neljä väriä riittää. Kuitenkin Heawood löysi todistuksesta virheen 11 vuotta myöhemmin, ja Kempen työn pohjalta todisti, että viisi väriä on riittävä. Neljän värin ongelma oli auki huomattavasti pidempään. Sen todistivat lopulta vuonna 1976 Appel ja Haken. Todistus perustuu paitsi teoreettiseen työhön, myös siihen, että tietokoneella on käyty läpi iso määrä erikoistapauksia. Jotkut ovat kyseenalaistaneet, onko tämä todistus lainkaan, kun on tarvittu tietokonetta lukuisien erikoistapausten läpikäyntiin.

2.2 Väritysten käytöstä

Väritykset ovat erittäin hyödyllisiä, kun pyritään osoittamaan, että jotain pintaa ei voida peittää joillakin laatoilla (niin, että laatat eivät mene päällekkän), tai että jonkinmallisia kuvioita ei pysty asettelemaan tiiviisti esimerkiksi suorakulmaiseen särmiöön. Käydään näitä läpi esimerkkien avulla

2.2.1 Asettelujen mahdottomiksi osoittaminen

Aloitetaan klassikolla.

Esimerkki 15. Shakkilaudasta on viety kaksi vastakkaista kulmaa pois. Voidaanko shakkilauta peittää dominonappuloilla, joista kukin peittää tasan kaksi ruutua? Dominonappulat asetellaan ruutujen mukaisesti, ja ne eivät saa mennä päällekkäin.

Väritetään ruudukko shakkivärityksellä. Molemmat poistetut kulmat ovat samanvärisiä, joten ruudukolla on jäljellä 30 toista väriä ja 32 toista väriä olevaa ruutua. Yksi dominonappula peittää yhden valkoisen ja yhden mustan ruudun. Dominonappuiloilla ei siis pysty peittämään ruudukkoa, jolla ei ole samaa määrää molempia ruutuja.

Siirrytään nyt hieman työläämpään tehtävään, jossa on kuitenkin aivan sama idea. Huomaa, että tehtävä ei ole monimutkainen. Lähinnä laskujen kirjoittaminen täsmällisesti on haastavaa.

Esimerkki 16. Voidaanko $10 \times 10 \times 10$-laatikko täyttää $1 \times 1 \times 4$-palikoilla?

Koska $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$, joka on jaollinen neljällä, pitää kehittää älykkäämpi argumentti kuin vain vedota siihen, että osa palikoista jäisi ulkopuolelle. Ryhdytään siis värittämään.

Ajatellaan laatikko koordinaatiston kokonaislukupisteinä. Voidaan jakaa laatikko tuhanneksi pikkukuutioksi. Samaistetaan nämä pisteet kokonaislukupisteisiin. Ajatellaan kulmien olevan pisteet $(0, 0, 0)$, $(9, 0, 0)$, $(0, 9, 0)$, $(0, 0, 9)$, $(9, 9, 0)$, $(9, 0, 9)$, $(0, 9, 9)$ ja $(9, 9, 9)$. Pikkulaatikot vastaavat siis pisteitä (a, b, c), missä $0 \leq a, b, c \leq 9$ ja $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Väritetään pisteet seuraavasti: Lauseke $a + b + c$ voi antaa jakojäännöksen $0, 1, 2$ tai 3 neljällä jaettaessa. Jos jakojäännös on 0, on piste (ja pistettä vastaava laatikko) punainen, jos jakojäännös on 1, on piste sininen, jos jakojäännös on 2, on piste keltainen ja jos jakojäännös on 3, on piste vihreä.

Koska palikat sijoitetaan laatikkoon koordinaattiakseleiden suuntaisesti, peittää jokainen palikka yhden vihreä, yhden sinisen, yhden punaisen ja yhden keltaisen pisteen. Jos siis laatikon täyttäminen palikoilla on mahdollista, on jokaisen värisiä pisteitä oltava yhtä paljon. Osoitetaan, että näin ei ole. Jos jokaista väriä olisi yhtä paljon, olisi ennen kaikkea oltava 250 punaista pistettä.

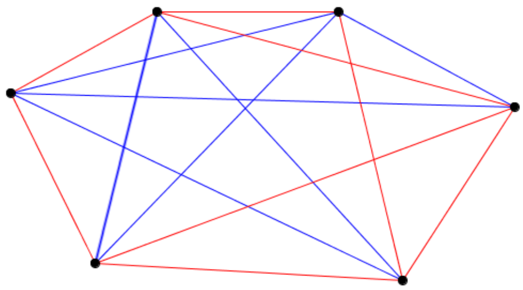
Lasketaan punaisten pisteiden määrä. Lasketaan ne ensin $8 \times 8 \times 8$ kuutiossa, jossa pisteet ovat muotoa (a, b, c), ja joille pätee $0 \leq a, b, c \leq 7$. Koska jokaisella koordinaattiakselin suuntaisella janalla on kaksi punaista, kaksi sinista, kaksi vihreää ja kaksi keltaista pistettä, on tässä kuutiossa täsmälleen neljäsosa pisteistä punaisia. Tarkastellaan seuraavaksi särmiötä, joka muodostuu pisteistä (a, b, c), joilla $8 \leq a \leq 9$ ja $0 \leq b, c \leq 7$. Nyt z-akselin suuntaisesti on jokaisella janalla jokaista väriä yhtä paljon, joten punaisia on neljännes. Vastaavasti voidaan käsitellä särmiö $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq c \leq 7$ ja $8 \leq b \leq 9$. Jäljellä on särmiö $0 \leq a, b \leq 9$ ja $8 \leq c \leq 9$. Kaikkia värejä on jälleen yhtä paljon särmiössä $0 \leq a, b \leq 9$ ja $0 \leq c \leq 7$. Jäljelle jäävät siis pisteet $(8, 8, 8)$, $(9, 8, 8)$, $(8, 9, 8)$, $(8, 8, 9)$, $(9, 9, 8)$, $(9, 8, 9)$, $(8, 9, 9)$ ja $(9, 9, 9)$. Lasketaan nämä nyt. $8 + 8 + 8$ antaa jakojäännöksen nolla, $9 + 8 + 8, 8 + 9 + 8$ ja $8 + 8 + 9$ antavat jakojäännöksen yksi, $9 + 9 + 8$, $9 + 8 + 9$ ja $8 + 9 + 9$ antavat jakojäännöksen kaksi ja $9 + 9 + 9$ antaa jakojäännöksen kolme.

2.2.2 Kuuden kättelijän ongelma

Eräs tunnettu esimerkki väritysten ja verkkojen käytöstä on seuraava tehtävä: Huoneessa on kuusi ihmistä. Osa heistä mahdollisesti kättelee toisiaan. Osa mahdollisesti ei kättele. Osoita, että aina löytyy sellaisten kolmen hengen joukko, joista jokainen on kätellyt toisiaan, tai kukaan ei ole kätellyt toistaan.

Tämän ongelman kanssa väritykset eivät ole kriittisin asia, vaan kyyhkyslakkaperiaate. Kuitenkin ongelmaan saa otetta, kun piirtää ihmiset verkoksi, ja värittää verkon sivut punaisella tai sinisellä sen mukaan ovatko ihmiset kätelleet toisiaan vai eivät. Väite muotoutuu tällöin muotoon, että löytyy varmasti jokin kolmio, jonka kaikki sivut ovat saman väriset.

Tilanne voi näyttää esimerkiksi seuraavanlaiselta:



Väitteen voi todistaa esimerkiksi seuraavalla tavalla. Otetaan jokin piste. Siitä lähtee punaisia ja sinisiä viivoja. Jomman kumman värisiä viivoja on pakko olla vähintään kolme kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla (viisi viivaa, kaksi väriä). Oletetaan, että punaisia on enemmän. Tarkastellaan kolmea pistettä, jotka yhdistyvät alkuperäiseen pisteeseen viivalla. Joko joidenkin kahden näistä välillä on punainen viiva, jolloin näistä pisteistä ja alkuperäisestä pisteestä muodostuu punainen kolmio, tai kaikki kolme on yhdistetty sinisillä viivoilla, jolloin löytyy sininen kolmio.

Luku 3

Rekursiiviset lukujonot

Rekursiivinen lukujono on sellainen, jossa seuraava jäsen on määritelty edellisten avulla. Tyypillinen esimerkki rekursiivisesta lukujonosta on Fibonaccin lukujono, joka on määritelty kaavalla

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

ja lisäehdolla $f_0 = 0$ ja $f_1 = 1$.

Myös esimerkiksi pankkilainan kehitys voidaan hieman yksinkertaistaen ilmaista rekursiivisesti:

$$P_n = k(P_{n-1} - V_{n-1}),$$

missä P_n on pankkilainan koko vuonna n, k on korko ja V_{n-1} on vähennysten määrä tehtynä vuonna $n-1$.

Yksinkertaisin mahdollinen lineaarinen rekursiivinen lukujono on sellainen, joka on määritelty kaavalla

$$a_{n+1} = da_n,$$

missä d on jokin vakio. Tästä saadaan helposti yleiseksi lausekkeeksi $a_{n+1} = d^n a_1$. Tästä esimerkkinä kävisi vaikkapa perintaikäs pitkän ajan tili:

Esimerkki 17. Korkeakorkoiselle säästötilille talletetaan 10000 euroa. Korko on 1%, eli joka vuosi rahasumma kerrotaan luvulla $1,01$. Kun n vuotta on kulunut, on tilillä

$$10000 \cdot 1,01^n$$

euroa. Rekursiivisesti asian voi ilmaista seuraavasti: $a_n = 1,01a_{n-1}$ ja $a_0 = 10000$.

Siirrytään nyt haastavampaan joukkoon rekursioita, eli useammasta aikaisemmasta termistä riippuviin lineaarisiin homogeenisiin rekursioihin (lineaarinen ja homogeeninen tarkoittaa sitä, että kaikkien termien aste on yksi, eli esimerkiksi rekursiota

$$a_{n+1} = a_n a_{n-1}$$

tai rekursiota $a_n = a_{n-1}^3$ ei kelpuuteta.

Tarkastelemme siis rekursioita, jotka ovat tyyppiä

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

missä luvut $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ovat vakioita. Mikäli rekursiolla on k alkuehtoa (eli ehtoja, esimerkiksi tyyppiä $a_0 = d_0$ tai $a_1 = d_1$, missä luvut d_0 ja d_1 ovat vakioita, jne, on rekursio yksikäsitteisesti määrätty.

Esitetään ensin ratkaisumenetelmä, ja osoitetaan sen jälkeen, että sillä saadaan kaikki ratkaisut. Käydään argumentti läpi siinä tilanteessa, että luvut ratkaisut $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k$ ovat keskenään erisuuria lukuja.

Lause 18. *Tarkastellaan rekursioyhtälöä $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$. Olkoot $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ polynomiyhtälön*

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots c_{k-1} x + c_k$$

ratkaisut (eli ns. karakteristisen polynomin juuret). Oletetaan, että ne ovat keskenään erisuuria. Tällöin

$$a_n = b_1 \rho_1^n + b_2 \rho_2^n + \cdots + b_k \rho_k^n$$

toteuttaa rekursioyhtälön, kun luvut b_i ovat mielivaltaisia vakioita.

Todistus. Tarkastetaan asettamalla suoraan lausekkeeseen, eli kysymys on siitä, päteekö yhtälö

$$\begin{aligned} b_1 \rho_1^n + b_2 \rho_2^n + \cdots + b_k \rho_k^n &= c_1 \left(b_1 \rho_1^{n-1} + b_2 \rho_2^{n-1} + \cdots + b_k \rho_k^{n-1} \right) \\ &+ c_2 \left(b_1 \rho_1^{n-2} + b_2 \rho_2^{n-2} + \cdots + b_k \rho_k^{n-2} \right) + \cdots + c_k \left(b_1 \rho_1^{n-k} + b_2 \rho_2^{n-k} + \cdots + b_k \rho_k^{n-k} \right)? \end{aligned}$$

Koska luvut ρ_i ovat polynomiyhtälön $x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots c_{k-1} x + c_k$ ratkaisuja, huomataan, että pätee

$$\begin{aligned} b_i \rho_i^n = b_i \rho_i^{n-k} \rho_i^k = b_i \rho_i^{n-k} \left(c_1 \rho_i^{k-1} + c_2 \rho_i^{k-2} + \cdots + c_k \right) \\ = b_i \left(c_1 \rho_i^{n-1} + c_2 \rho_i^{n-2} + \cdots + c_k \rho_i^{n-k} \right), \end{aligned}$$

joten lauseke toteuttaa rekursioyhtälön. □

Jos alkuehdot $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tunnetaan, voidaan määrittää kertoimet b_i ratkaisemalla yhtälöryhmä, joka koostuu yhtälöistä muotoa

$$b_1 \rho_1^\ell + b_2 \rho_2^\ell + \cdots b_k \rho_k \ell = a_\ell.$$

Seuraavaksi on vielä perusteltava, miksi tällä yhtälöllä on ratkaisu. Matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^{k-1} \\ 1 & \rho_2 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \rho_k & \rho_k^2 & \cdots & \rho_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

on van der Monden matriisi, ja sen determinantti on

$$\prod_{1\le i<j\le n} (\rho_i - \rho_j) \neq 0,$$

kun $\rho_i \neq \rho_j$ kaikilla $i \neq j$, kuten oletettiinkin. Oman yhtälönryhmämme vasemman puoien kerroinmatriisi on Vandermonden matriisi, jonka i. rivi on kerrottu luvulla ρ_i. Siispä sen determinantti on

$$\left(\prod_{1\le i\le n} \rho_i\right)\left(\prod_{1\le i<j\le n} (\rho_i - \rho_j)\right) \neq 0,$$

koska paitsi että luvut ρ_i ovat pareittain erisuuria, niin ne ovat myös nollasta poikkeavia. Yhtälöryhmällä on siis ratkaisu.

Käsitellään nyt toinen suunta, eli osoitetaan, että rekursioyhtälön ratkaisut todellakin saadaan annetulla kaavalla.

Lause 19. *Olkoon polynomin $x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \cdots - c_{k-1}x - c_k$ juuret erisuuria. Rekursiivinen lukujono on määritelty ehdolla*

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k},$$

kaikille $n \ge M + 1$. Sen kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$a_n = b_1\rho_1^n + b_2\rho_2^n + \cdots + b_k\rho_k^n,$$

missä luvut b_i ovat joitakin vakioita ja luvut $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ ovat polynomiyhtälön

$$x^k = c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \cdots + c_{k-1}x + c_k$$

ratkaisut.

Todistus. Tarkastellaan aluksi alkuarvoja $a_{M-k+1}, a_{M-k+2}, \ldots, a_M$. Voimme jälleen ratkaista yhtälöryhmän, joka muodostuu yhtälöistä muotoa

$$b_1\rho_1^\ell + b_2\rho_2^\ell + \cdots b_k\rho_k^\ell = a_\ell.$$

Täten rarvot $M - k + 1, M - k + 2, \ldots, M$ saadaan saadaan kaavan avulla. Koska $\rho_i^k = c_1\rho_i^{k-1} + c_2\rho_i^{k-2} + \cdots + c_{k-1}\rho_i + c_k$, nähdään induktiolla, että myös muut arvot saadaan annetulla kaavalla. □

Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa osa juurista on samoja. Tällöin ylläannettu lähestymistapa ei toimi, sillä Vandermonden matriisin determinantti on nolla, joten alkuarvojen avulla ei voida ratkaista kertoimia.

Lause 20. *Olkoot karakteristen polynomin juuret (eli polynomiyhtälön ratkaisut) $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m$, ja oletetaan, että juuri ρ_i on α_i-kertainen. Nyt rekursion yleinen ratkaisu on*

$$\begin{aligned} a_n = \rho_1^n \left(b_{1_1} + b_{1_2}n + \cdots + b_{1_{\alpha_1}}n^{\alpha_1-1}\right) + \rho_2^n \left(b_{2_1} + b_{2_2}n + \cdots + b_{2_{\alpha_2}}n^{\alpha_2-1}\right) \\ + \cdots + \rho_m^n \left(b_{m_1} + b_{m_2}n + \cdots + b_{m_{\alpha_m}}n^{\alpha_m-1}\right) \end{aligned}$$

Todistetaan nyt, että tällaiset luvut todellakin toteuttavat rekursion.

Todistus. Todistettava väite on siis muotoa

$$\begin{aligned}
&\rho_1^n\left(b_{1_1}+b_{1_2}n+\cdots+b_{1_{\alpha_1}}n^{\alpha_1-1}\right)+\rho_2^n\left(b_{2_1}+b_{2_2}n+\cdots+b_{2_{\alpha_2}}n^{\alpha_2-1}\right)\\
&\qquad+\cdots+\rho_m^n\left(b_{m_1}+b_{m_2}n+\cdots+b_{m_{\alpha_m}}n^{\alpha_m-1}\right)\\
&=\sum_{j=n-k}^{n-1}c_{n-j}\left(\rho_1^j\left(b_{1_1}+b_{1_2}j+\cdots+b_{1_{\alpha_1}}j^{\alpha_1-1}\right)+\rho_2^j\left(b_{2_1}+b_{2_2}j+\cdots+b_{2_{\alpha_2}}j^{\alpha_2-1}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\cdots+\rho_m^j\left(b_{m_1}+b_{m_2}j+\cdots+b_{m_{\alpha_m}}j^{\alpha_m-1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Osoitetaan siis, että

$$\rho_i^n b_{i_m} n^m=\sum_{j=n-k}^{n-1}c_{n-j}\rho_i^j j^m b_{i_m}.$$

Jos $b_{i_m}=0$, on väite triviaalisti tosi. Jos näin ei ole, niin väite on yhtäpitävä väitteen

$$\rho_i^n n^m=\sum_{j=n-k}^{n-1}c_{n-j}\rho_i^j j^m$$

kanssa. Todistetaan tämä lähtien liikkeelle karakteristisesta polynomista ja sitä vastaavasta polynomiyhtälöstä. Polynomilla

$$x^k-(c_1x^{k-1}+c_2x^{k-2}+\cdots c_k)$$

on α_i-kertainen nollakohta, kun $x=\rho_i$. Muistetaan, että $m<\alpha_i$. Voidaan siis kirjoittaa polynomi muodossa $(x-\rho_i)^{\alpha_i}P(x)$, missä $P(x)$ on jokin polynomi. Kerrotaan tämä polynomi termillä n^{n-k}, ja saadaan astetta n oleva polynomi. Nyt derivoidaan:

$$\begin{aligned}
&D\left(x^{n-k}(x-\rho_i)^{\alpha_i}P(x)\right)\\
&\quad=(n-k)x^{n-k-1}(x-\rho_i)^{\alpha_i}P(x)+x^{n-k}(x-\rho_i)^{\alpha_i-1}\alpha_iP(x)+x^{n-k}(x-\rho_i)^{\alpha_i}P'(x)\\
&\qquad=x^{n-k-1}(x-\rho_i)^{\alpha_i-1}\left((n-k)(x-\rho_i)P(x)+\alpha_ixP(x)+x(x-\rho_i)P'(x)\right)\\
&\qquad\qquad:=x^{n-k-1}(x-\rho_i)^{\alpha_i-1}Q(x).
\end{aligned}$$

Kerrotaan tämä polynomi muuttujalla x, jolloin saadaan polynomi $x^{n-k}(x-\rho_i)^{\alpha_i-1}Q(x)$. Derivoidaan taas:

$$\begin{aligned}
&D(x^{n-k}(x-\rho_i)^{\alpha_i-1}Q(x))\\
&\quad=x^{n-k-1}(x-\rho_i)^{\alpha_i-2}\left((n-k)(x-\rho_i)Q(x)+(\alpha_i-1)xQ(x)+x(x-\rho_i)Q'(x)\right)\\
&\qquad:=x^{n-k-1}(x-\rho_i)^{\alpha_i-2}Q_1(x).
\end{aligned}$$

Kertomisen ja derivoinnin operaatiota voidaan toistaa, ja huomataan, että termin $x-\rho_i$ eksponentti vähenee joka kierroksella (=derivointi ja sen jälkeen termilla x kertominen) yhdellä. Siispä, $\alpha_i - 1$ kierroksen jälkeen polynomila on yhä ρ_i nollakohtana. Ennen kaikkea siis j kierroksen jälkeen polynomilla on ρ_i nollakohtana.

Miten tämä sitten liittyy käsiteltävään polynomiin? Tarkastellaan nyt mitä karakteristiselle polynomille näissä operaatioissa tapahtuu, jos ei tarkastella sitä tulona vaan lausekkeena $x^k - (c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_k)$. Kerrotaan tämä siis ensin termillä x^{n-k}. Tuloksena on polynomi $x^n - (c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_k x^{n-k})$. Ryhdytään nyt derivoimaan tätä:

$$\begin{aligned} &D(x^n - (c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_k x^{n-k})) \\ &\qquad = nx^{n-1} - (c_1(n-1)x^{n-2} + c_2(n-2)x^{n-3} + \cdots + c_k(n-k)x^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Kerrotaan termillä x, saadaan $x^n - (c_1(n-1)x^{n-1} + c_2(n-2)x^{n-2} + \cdots + c_k(n-k)x^{n-k}$. Derivoidaan jälleen:

$$\begin{aligned} &D(nx^n - (c_1(n-1)x^{n-1} + c_2(n-2)x^{n-2} + \cdots + c_k(n-k)x^{n-k}) \\ &\qquad = n^2 x^{n-1} - (c_1(n-1)^2 x^{n-2} + c_2(n-2)^2 x^{n-3} + \cdots + c_k(n-k)^2 x^{n-k-1}). \end{aligned}$$

Termillä x kertomisen jälkeen polynomi näyttää tältä:

$$n^2 x^n - (c_1(n-1)^2 x^{n-1} + c_2(n-2)^2 x^{n-2} + \cdots + c_k(n-k)^2 x^{n-k})$$

Derivointia ja sen jälkeistä termillä x kertomista voidaan toistaa yhteensä j kertaa. Sen jälkeen polynomi on

$$n^j x^n - (c_1(n-1)^j x^{n-1} + c_2(n-2)^j x^{n-2} + \cdots + c_k(n-k)^j x^{n-k}).$$

Tämä on täsmälleen se polynomi, jota meidän tulikin tarkastella. Aiemmin lasketun pohjalta (eli tuli muodon avulla) nähdään, että tämän nollakohta on todellakin ρ_i. Siispä

$$n^j \rho_i^n = c_1(n-1)^j \rho_i^{n-1} + c_2(n-2)^j \rho_i^{n-2} + \cdots + c_k(n-k)^j \rho_i^{n-k},$$

mikä onkin juuri se, mitä tarvittiin. □

Tarkastellaan esimerkkinä Fibonaccin lukujonoa.

Esimerkki 21. Ratkaistaan Fibonaccin lukujonolle $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ yleisen termin lauseke. Lisäksi tiedetään, että $f_0 = 0$ ja $f_1 = 1$, ja niistä voidaan ratkaista kertoimet b_i.

Fibonaccin lukujonoa vastaava polynomiyhtälön on $x^2 = x + 1$. Ratkaistaan ne ratkaisukaavan avulla:

$$\rho = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Siispä, rekursioyhtälön toteuttavat kaikki luvut

$$f_n = b_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + b_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Selvitetään nyt alkuehtojen avulla mitkä lukujen b_1 ja b_2 tulee olla. Alkuehdoista saadaan

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 0 \\ b_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + b_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1. \end{cases}$$

Siispä $b_1 = -b_2$, joten

$$1 = b_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} - b_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = b_1\sqrt{5},$$

joten $-b_2 = b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, joten Fibonaccin lukujen toteuttavat luvut

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Lukujen ositusten lukumäärän laskeminen on vanha ongelma. Lukujen ositukset ovat tapoja esittää luku korkeintaan itsensä kokoisten positiivisten kokonaislukujen summana. Kysymys muuttuu kuitenkin paljon lähestyttävämmäksi, jos kaikkien ositusten sijaan tarkastelemme vain sellaisia osituksia, joissa summattavat ovat rajatun kokoisia.

Esimerkki 22. Määritellään a_n olemaan sellaisten ositusten lukumäärä, jossa kaikki summattavat ovat korkeintaan luvun kolme kokoisia. Järjestys merkitsee, eli esimerkiksi ositukset $1+2$ ja $2+1$ ovat nyt erilaisia.

Huomataan, että $a_0 = 0$ (nollaa ei voi esittää positiivisten lukujen summana), $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ $(1+1$ ja $2)$ ja $a_3 = 4$ $(1+1+1,\ 2+1,\ 1+2,\ 3)$. Yleisesti huomataan, että ositukset voidaan lajitella sen mukaan onko ensimmäinen summattava yksi, kaksi vai kolme. Jos luvun n osituksen ensimmäinen summattava on yksi, on loppuosan osituksesta muodostettava luvun $n-1$ ositus. Jos osituksen ensimmäinen summattava on kaksi, on loppuosan osituksesta muodostettava luvun $n-2$ ositus. Jos taas osituksen ensimmäinen summattava on kolme, on loppuosan osituksesta muodostettava luvun $n-3$ ositus. Siispä

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}.$$

Alussa käytyjen alkuarvojen perusteella huomataan esimerkiksi, että luvun kolme osituksista osituksissa $1+2$ ja $1+1+1$ ensimmäinen summattava on yksi, joten loppuosa ositusta 2 ja $1+1$ vastaavat luvun kaksi ositusta. Osituksessa $2+1$ ensimmäinen luku on kaksi, joten loppuosa 1 vastaa luvun yksi ositusta. Osituksessa 3 ensimmäinen summatava on kolme, ja loppuosa, joka on tyhjä joukko, vastaa luvun nolla ositusta (ei osituksia). Tässä on kuitenkin tärkeää huomata, että

$$a_3 \neq a_0 + a_1 + a_2$$

juuri nimenomaan siitä syystä, että luvun a_3 yksi osituksista vastaa luvun nolla ositusta. Nollalla ei osituksia ole, mutta kolmella tämä vastaava ositus on, sillä $3 > 0$ (eli pelkka tyhjä summa ei ole ositus, mutta yksinään luku 3 on).

Vastaavalla polynomiyhtälöllä $x^3 = x^2 + x + 1$ on kolme juurta, joista yksi on reaalinen. Näiden tarkkojen arvojen lausekkeet ovat melko epämiellyttävät, mutta likiarvot ovat

$$\begin{cases} \rho_1 \approx 1,8393 \\ \rho_2 \approx -0,41964 + 0,60629i \\ \rho_3 \approx -0,41964 - 0,60629i \end{cases}$$

Yleisesti siis

$$a_n = b_1\rho_1^n + b_2\rho_2^n + b_3\rho_3^n.$$

Näiden likiarvojen ja arvojen a_1, a_2 ja a_3 avulla voi määrittää likiarvot kertoimille b_1, b_2 ja b_3, ja näiden tietojen avulla voi taas arvioida lukujen a_n käytöstä. On tärkeää huomata, että alkuehtoihin ei voi ottaa lukua a_0, sillä se on poikkeustapaus, ja rekursio $a_3 = a_2 + a_1 + a_0$ ei ole tosi.

Otetaan vielä yksi esimerkki rekursiivisista funktioista.

Esimerkki 23. Verkossa on M pistettå/kärkeä, ja särmät (eli viivat pisteiden/kärkien välissä) on väritetty n värillä. Olkoon a_n se luku, joka kertoo, että mikäli $M \geq a_n$, niin verkosta löytyy varmastii kolmen pisteen joukko niin, että kaikki näiden pisteiden väliset viivat/särmät on väritetty samalla värillä. Osoitetaan, että $a_n \leq n(a_{n-1} - 1) + 2$.

Tarkastellaan verkkoa, jossa on $n(a_{n-1} - 1) + 2$ pistettä, ja jonka särmät/viivat on väritetty n värillä. Otetaan yksi verkon piste. Kutsutaan tätä pisteeksi X. Pisteesä X lähtee $n(a_{n-1} - 1) + 1$ särmää, jotka ovat maksimissaan n värisiä, joten kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla vähintään a_{n-1} särmää on väritetty samalla värillä. Oletetaan, että nämä särmät ovat mustia. Jos nyt jotkin kaksi näistä pisteistä (jotka on siis yhdistetty pisteeseen X mustalla viivalla) on yhdistetty keskenään mustalla viivalla, on kolmio löytynyt. Jos taas mitkään kaksi näistä pisteistä ei ole yhdistetty toisiinsa mustalla viivalla, on joukko a_{n-1} pisteestä koostuva verkko, jonka särmät on väritetty maksimissaan $n - 1$ värillä (eli musta ei ole käytössä, mutta loput värit mahdollisesti on). Täältä löytyy siis määritelmän nojalla kolme pistettä, joiden väliset särmät on väritetty samalla värillä.

Luku 4

Generoivat funktiot

Jonon a_n generoiva funktio on sarja muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Esimerkki 24. Jonon $a_n = 1$ generoiva funktio on

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ja se voidaan esittää suljetussa muodossa

$$\frac{1}{1-x}.$$

Jotta voimme tehokkaasti laskea generoivia funktioita, pitää meidän ensin muistella osamurtokehitelmien ominaisuuksia.

4.1 Osamurtokehitelmät

Rationaalifunktion osamurtokehitelmässä funktio kirjoitetaan sellaisten rationaalifunktioiden summana, joiden osoittajan aste on matalampi kuin nimittäjän, ja nimittäjät ovat reaalilukujen joukossa jaottomien polynomien potensseja. Nimittäjät ovat siis ensimmäisen ja toisen asteen polynomien potensseja, ja jos nimittäjä on toisen asteen polynomi tai sen potenssi, on osoittaja ensimmäisen asteen polynomi tai vakio. Muulloin osoittaja on vakio.

Esimerkki 25. Kirjoitetaan funktion

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)}$$

osamurtokehitelmä. Kehitelmä tulee näyttämään seuraavanlaiselta:

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+4}.$$

Määritetään kertoimet A ja B. Lavennetaan lausekkeet samannimisiksi:

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+4}=\frac{A(x+4)+B(x+1)}{(x+1)(x+4)}=\frac{(A+B)x+4A+B}{(x+1)(x+4)}.$$

Nimittäjä näyttää siltä kuin pitäisikin. Osoittajassa pitäisi olla 1, joten termin x kertoimen on hävittävä, ja lisäksi on pädettävä $4A+B=1$. Siispä

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+B=1, \end{cases}$$

eli ensimmäisestä seuraa $A=-B$ ja toisesta $1=4A+B=3A$, joten $-B=A=\frac{1}{3}$. Siispä

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+4}.$$

Otetaan vielä toinen esimerkki, jonka tarkoitus on valottaa mitä tehdään, jos sama juuri toistuu useaan kertaan.

Esimerkki 26. Kirjoitetaan funktion

$$\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+3)}$$

osamurtokehitelmä. Kehitelmä tulee näyttämään seuraavanlaiselta.

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+3}=\frac{A(x+1)(x+3)+B(x+3)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x+3)}.$$

Kerrotaan auki osoittajan lauseke:

$$\begin{aligned} A(x+1)(x+3)+B(x+3)+C(x+1)^2 &= Ax^2+4Ax+3A+Bx+3B+Cx^2+2Cx+C \\ &= (A+C)x^2+(4A+B+2C)x+3A+3B+C. \end{aligned}$$

Kertoimia vertaillen saadaan: toisen asteen termistä $A=-C$, ja tämä muihin yhtälöihin sijoittamalla saadaan muodostettua yhtälöpari

$$\begin{cases} 2A+B=2 \\ 2A+3B=3 \end{cases}$$

Nämä toisistaan vähentämällä saadaan $2B=1$, joten $B=\frac{1}{2}$, ja siis $A=\frac{1}{2}$ ja $C=-\frac{1}{2}$. Kehitelmästä tulee siis

$$\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

4.2 Menetelmiä löytää generoivia funktioita

4.2.1 Tunnettuun funktioon nojautuminen

Joidenkin jonojen generoivat funktiot ovat hyvin tunnettuja (kuten jonon $a_n = 1$. Tämän avulla voi kehittää joidenkin toisten funktioiden generoivia funktioita suljetussa muodossa.

Esimerkki 27. Kehitetään jonon $a_n = n$ generoiva funktio. Tämän jonon generoiva funktio on

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

Etsitään tälle suljettu muoto. Huomataan, että

$$xD\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

Siispä, jos derivoidaan funktioita $\frac{1}{1-x}$ ja kerrotaan funktio derivoinnin jälkeen termillä x, saadaan generoivan funktion suljettu muoto.

$$xD\left(\frac{1}{1-x}\right) = x\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

4.2.2 Rekursioon nojautuminen

Halutaan löytää sellaisen jonon generoiva funktio, jonka jono tunnetaan rekursiivisessa muodossa, eli muodossa

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n + \sum_{n=k}^{\infty} \left(c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n + c_1 \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-1} x^n + c_2 \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-2} x^n + \cdots + c_k \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n + c_1 x \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + c_2 x^2 \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_k \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n + c_1 x \sum_{n=k-1}^{\infty} a_n x^n + c_2 x^2 \sum_{n=k-2}^{\infty} a_n x^n + \cdots + c_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.
\end{aligned}$$

Yleinen summa ylläolevassa lausekkeessa on muotoa

$$c_j x^j \sum_{n=k-j}^{\infty} a_n x^n = c_j x^j \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{k-j-1} a_n x^n \right)$$

Merkitään $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nyt saadaan lauseke muotoon

$$\begin{aligned} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{k-j-1} a_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n + \sum_{j=1}^{k} c_j x^j \left(g(x) - \sum_{n=0}^{k-j-1} a_n x^n \right) \\ &= g(x) \sum_{j=1}^{k} c_j x^j + \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n - \sum_{j=1}^{k} c_j x^j \sum_{n=0}^{k-j-1} a_n x^n. \end{aligned}$$

Siirrellään generoivan funktion sisältävät termit vasemmalle puolelle.

$$g(x) \left(1 - \sum_{j=1}^{k} c_j x^j \right) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n - \sum_{j=1}^{k} c_j x^j \sum_{n=0}^{k-j-1} a_n x^n.$$

Siispä

$$g(x) = \frac{\sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n - \sum_{j=1}^{k} c_j x^j \sum_{n=0}^{k-j-1} a_n x^n}{1 - \sum_{j=1}^{k} c_j x^j}.$$

4.3 Rekursiivisesti määritellyn jonon jäsenten lausekkeiden määrittäminen generoivan funktion avulla

Toisinaan rekursiivisesti määritellyn jonon jäsenille voi saada kauniin kaavan generoivan funktion avulla. Käydään tästä läpi esimerkkejä.

Ensimmäinen esimerkki on läheinen sukulainen tähänastisille rekursiivisille jonoille:

Esimerkki 28. Olkoon rekursiivinen jono määritelty kaavoilla $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 5^n$. Ratkaistaan jonon termien lausekkeet generoivien funktioiden avulla.

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Hyödynnetään rekursiota:

$$\begin{aligned} A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_{n-1} + a_{n-2} + 5^n\right) x^n \\ &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + x\left(A(x) - a_0\right) + x^2 A(x) + \sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^n \\ &= a_0 + (a_1 - a_0) x + (x^2 + x) A(x) + \sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^n. \end{aligned}$$

Siispä

$$(1 - x - x^2) A(x) = a_0 + (a_1 - a_0) x + \sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^n,$$

joten

$$A(x) = \frac{x + \sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^n}{1 - x - x^2}.$$

Osio

$$\frac{x}{1 - x - x^2}$$

on Fibonaccin lukujonon generoiva funktio (tämän näkee vaikka katsomalla mitä alun laskuissa tapahtuu ilman summaa 5^n).

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n,$$

missä

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Jälkimmäinen osio on puolestaan

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^n}{1-x-x^2} &= \frac{x}{1-x-x^2} \cdot \frac{\sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^n}{x} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^{n-1}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m\right) \\
&= 5\left(\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m\right) = 5\sum_{M=1}^{\infty} x^M \sum_{n+m=M, m\geq 0, n\geq 1} 5^n f_m \\
&= 5\sum_{M=1}^{\infty} x^M \sum_{n+m=M, m\geq 0, n\geq 1} 5^n \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^m\right) \\
&= \sqrt{5}\sum_{M=1}^{\infty} x^M \sum_{1\leq n\leq M} 5^n \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{M-n} - \left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^{M-n}\right) \\
&= \sqrt{5}\sum_{M=1}^{\infty} x^M \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^M \frac{5}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \sum_{0\leq n\leq M-1}\left(\frac{5}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^M \frac{5}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \sum_{0\leq n\leq M-1}\left(\frac{5}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)^n\right) \\
&= 5\sqrt{5}\sum_{M=1}^{\infty} x^M \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^M \frac{\left(\frac{5}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^M - 1}{\frac{5}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} - 1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^M \frac{\left(\frac{5}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)^M - 1}{\frac{5}{\frac{-\sqrt{5}+1}{2}} - 1}\right) \\
&= 5\sqrt{5}\sum_{M=1}^{\infty} x^M \left(\frac{5^M - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^M}{\frac{10}{\sqrt{5}+1} - 1} - \frac{5^M - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^M}{\frac{10}{-\sqrt{5}+1} - 1}\right),
\end{aligned}
$$

jolloin

$$
a_M = \frac{5^M - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^M}{\frac{10}{\sqrt{5}+1} - 1} - \frac{5^M - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^M}{\frac{10}{-\sqrt{5}+1} - 1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^M - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^M
$$

(ja tätä voi tietenkin supistaa vielä eteenpäin, mutta nyt on ainakin päästy eroon rekursioista).

Esimerkki 29 (Esimerkki 6 ii) generoivien funktioiden kappaleesta Tietäväisen kombinatoriikan monisteesta, R. Ernvallin käsialaa ratkaisu)**.** Olkoon $u_1 = 1$ ja

$$
u_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}.
$$

Miltä näyttää u_i? Olkoon jonon generoiva funktio

$$
U(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}\right) x^n = x + (U(x))^2 .
$$

Siispä

$$(U(x))^2 - U(x) + x = 0,$$

joten

$$U(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4x}\right).$$

Neliöjuurelle on nyt löydettävä kehitelmä potenssisarjana. Tämän voi tehdä binomikerrointen kautta, tai sitten yksinkertaisesti Taylorin sarjan avulla.

$$y^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{2^n n!}(y-1)^n,$$

joten

$$(1-4x)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{n! 2^n}(-4x)^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{n!} 2^n x^n.$$

Sijoitetaan tämä generoivan funktion lausekkeeseen. Saadaan

$$U(x) = \frac{1 \pm \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{n!} 2^n x^n\right)}{2}.$$

Generoivalla funktiolla ei ole arvoa $n = 0$ olevaa termiä, eli kehitelmässä ei ole vakiotermiä. Voidaan siis päätellä, että oikea merkkivalinta kohdassa $\pm$ on miinus. Siispä

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{n!} 2^{n-1} x^n,$$

joten

$$u_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{n!} 2^{n-1}.$$

4.4 Katkaistut summat

Katkaistut summat eivät varsinaisesti liity generoiviin funktioihin, mutta tekniikat, joilla monia summia saa arvioitua on sen verran, että olisi sääli olla hyödyntämättä tilaisuutta. Nyt ei niinkään tuijoteta kertoimia (vaikka sekin on hyödyllistä joskus), vaan nyt lähinnä mietitään menetelmiä, joilla summia voi manipuloida. Derivointi, integrointi ja kertominen ovat hyödyllisiä tekniikoita. Lasketaan esimerkki.

Esimerkistä on ennen kaikkea tarkoitus huomata miten derivoinnin avulla voi tunnetusta kaavasta saada kaavan jollekin vähän tuntemattomammalle lausekkeelle. Tämä on ihan sama tekniikka kuin millä voi luoda generoivien funktioiden suljettuja muotoja erilaisille yksinkertaisille jonoille, kuten jonoille $a_n = n^m$, missä m on positiivinen kokonaisluku.

Esimerkki 30. Laskettava summa

$$\sum_{n=1}^{50} n3^n.$$

Ensimmäinen vaihe on korvata luku kolme termilla x, jotta voidaan ryhtyä derivoimaan. Summa muuntuu siis muotoon

$$\sum_{n=1}^{50} nx^n = x\sum_{n=1}^{50} nx^{n-1} = x\sum_{n=0}^{49}(n+1)x^n,$$

ja nyt summa onkin helppo tunnistaa geometrisen sarjan derivaataksi, eli

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{49}(n+1)x^n = D\sum_{n=0}^{49} x^{n+1} = Dx\sum_{n=0}^{49} x^n = Dx\frac{x^{50}-1}{x-1} &= D\left((x^{51}-x)(x-1)^{-1}\right)\\ &= (51x^{50}-1)(x-1)^{-1} - (x^{51}-x)(x-1)^{-2}.\end{aligned}$$

Saadaan siis

$$\sum_{n=1}^{50} nx^n = x\sum_{n=0}^{49}(n+1)x^n = x\left((51x^{50}-1)(x-1)^{-1} - (x^{51}-x)(x-1)^{-2}\right),$$

joten

$$\sum_{n=1}^{50} n3^n = 3\left(\frac{51\cdot 3^{50}-1}{2} - \frac{3^{51}-3}{4}\right).$$