Kombinatoriikan kurssin toiset laskuharjoitukset
Malliratkaisuja
Sauli Tikka

2. kesäkuuta 2015

Yhden tähden $\star$ tehtävät käydään läpi laskareissa, kahden tähden $\star\star$ tehtävä palautetaan vertaisarvioitavaksi Moodleen.

1. $\star$ Kuinka moni korkeintaan luvun 140 suuruisista luvuista on jaollinen ainakin jollakin luvuista $2, 5, 7$?

   Ratkaisu 1. Halutaan siis selvittää niiden lukujen lukumäärä, jotka ovat jaollisia vähintään yhdellä luvuista $2, 5, 7$. Mukaan lasketaan siis myös luvut, jotka ovat jollain kahdella em. luvuista jaollisia tai kaikilla kolmella jaollisia. Tämän ongelman selvittämiseksi on näppärää käyttää inkuusio-ekskluusio -periaatetta.
   Joukossa $[140]$ on kahdella jaollisia lukuja $140/2 = 70$, viidellä jaollisia lukuja $140/5 = 28$ ja seitsemällä jaollisia lukuja $140/7 = 20$. Tässä vaiheessa tuli kuitenkin laskettua kahdesti esimerkiksi luku 10, joka on jaollinen sekä luvulla 2 että luvulla 5. Seuraavaksi lasketaankin jollain kahdella luvuista $2, 5, 7$ jaolliset luvut, jotta ne voidaan poistaa.
   Luvuilla 2 ja 5 jaolliset luvut ovat täsmälleen niitä, jotka ovat jaollisia luvulla 10 ja näitä on $140/10 = 14$ kappaletta. Luvuilla 2 ja 7 eli luvulla 14 jaollisia lukuja on $140/14 = 10$ ja luvuilla 5 ja 7 eli luvulla 35 jaollisia lukuja on $140/35 = 4$ kappaletta. Viimeiseksi huomioidaan, että luvuilla $2, 5$ ja 7 jaolliset eli luvulla 70 jaolliset luvut, joita on tasan 2 kappaletta on tullut laskettua ja poistettua yhtä monta kertaa, joten ne on vielä lisättävä lopuksi. Kaiken kaikkiaan ainakin jollakin luvuista $2, 5, 7$ jaollisia lukuja joukossa $[140]$ on

   $$70 + 28 + 20 - (14 + 10 + 4) + 2 = 92$$

   kappaletta.

2. Tsekkiläisessä tutkimusinstituutissa on 67 jäsentä. Heistä 47 puhuu englantia, 35 saksaa ja 20 ranskaa. Lisäksi tiedetään, että heistä 23 puhuu sekä englantia että saksaa, 12 englantia ja ranskaa ja 11 saksaa ja ranskaa. Viiden tiedetään puhuvan kaikkia kolmea kieltä. Kuinka moni ei puhu mitään näistä kielistä?

Ratkaisu 2. Vastaavasti kuin tehtävässä 1 voidaan inkluusio-ekskluusio -periaatteella selvittää kuinka moni tutkimusinstituutin 67:stä jäsenestä puhuu vähintään yhtä tehtävän kielistä. Tarvittavat luvut on annettu jo tehtävänannossa, joten voidaan suoraan laskea, että

$$47 + 35 + 20 - (23 + 12 + 11) + 5 = 102 - 46 + 5 = 61$$

tutkimusinstituutin 67 jäsenestä puhuu vähintään yhtä kieltä. Näin ollen 6 jäsentä ei puhu mitään näistä kielistä.

3. Kuinka monta epäjärjestystä on viiden alkion jonolla?

   Ratkaisu 3. Epäjärjestys on sellainen n:n alkion jonon uudelleenjärjestäminen, että yksikään jonon alkioista ei pysy paikoillaan. Epäjärjestykset ovat siis n-jonon permutaatioita (kuvauksina bijektioita), joille on kuitenkin annettu edellämainittu lisäehto. Kurssin monisteessa on näiden määrälle johdettu kaava. Kyseisen kaavan mukaan n-jonon epäjärjestysten määrä on

   $$n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

   Tämän kaavan nojalla viiden alkion jonon epäjärjestysten määrä on

   $$5!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}) = 120 \cdot (\frac{60}{120} - \frac{20}{120} + \frac{5}{120} - \frac{1}{120}) = 44.$$

4. $\star$ Joukossa A on a alkiota ja joukossa B on b alkiota. Tiedetään, että $a \geq b$. Kuinka monta surjektiota on joukolta A joukolle B?

   Ratkaisu 4. Voi olla, että surjektioiden määrän laskeminen 'suoraan' on hankalaa, siispä käytämme inkluusio-ekskluusio -periaatetta eliminoidaksemme kaikkien kuvausten joukosta epäsuotuisat tapaukset eli kuvaukset, jotka eivät ole surjektioita. Numeroidaan joukon B alkiot eli kirjoitetaan se muodossa $B = \{y_1, \ldots, y_b\}$. Olkoon nyt jokaisella $i = 1, \ldots, b$

   $$C_i = \{f \mid f\colon A \to B \text{ kuvaus }, y_i \notin f(A)\}.$$

   Joukko C_i siis koostuu täsmälleen sellaisista kuvauksista, joiden maalijoukkoon piste $y_i \in B$ ei kuulu. Jos nyt $f \in C_i$ jollakin $i = 1, \ldots, b$, niin f ei ole surjektio ja kääntäen jos f ei ole surjektio, niin on olemassa $y_i \in B$ s.e $f(x) \neq y_i$ kaikilla $x \in A$ jolloin f kuuluu joukkoon C_i. Siis voimme kirjoittaa ei-surjektiivisten kuvausten joukon muodossa

   $$C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_b.$$

   Toisaalta tätä muotoa olevan joukon koko on helppo laskea inkluusio-ekskluusioperiaatteella, nimittäin

   $$|C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_b| = \sum_{k=1}^{b} |C_k| - \sum_{j<k} |C_j \cap C_k| + \sum_{j<k<m} |C_j \cap C_k \cap C_m| - \ldots + (-1)^{b+1} |C_1 \cap C_2 \cap \ldots C_b|.$$

Jokaisella $k = 1, \ldots, b$ joukko C_k koostuu kuvauksista $f\colon A \to B \setminus \{y_k\}$. Joukossa $B \setminus \{y_k\}$ on $b-1$ alkiota, joten ensimmäisen viikon harjoitusten tehtävän 6 nojalla tälläisten kuvausten lukumäärä on $(b-1)^a$. Siis

$$\sum_{k=1}^{b} |C_k| = \sum_{k=1}^{b} (b-1)^a = b \cdot (b-1)^a = \binom{b}{1}(b-1)^a.$$

Tutkitaan sitten joukkoja $C_j \cap C_k$, missä $1 \leq j < k \leq b$. Tälläiset joukot koostuvat kuvauksista $f\colon A \to B \setminus \{y_j, y_k\}$. Vastaavasti kuin edellä tälläisten kuvausten lukumääräksi saadaan $(b-2)^a$. Toisaalta tälläisiä indeksipareja on täsmälleen niin monta kuin b-alkioisella joukolla on 2-alkioisia osajoukkoja. Siispä

$$\sum_{j<k} |C_j \cap C_k| = \binom{b}{2}(b-2)^a.$$

Vastaavasti saamme

$$\sum_{j<k<m} |C_j \cap C_k \cap C_m| = \binom{b}{3}(b-3)^a,$$

ja lopulta

$$\sum_{j_1<\ldots<j_{b-1}} |C_{j_1} \ldots \cap C_{j_{b-1}}| = \binom{b}{b-1}(b-(b-1))^a.$$

Viimeiseksi lasketaan vielä

$$(-1)^{b+1}|C_1 \cap C_2 \cap \ldots C_b| = 0 = \binom{b}{b}(b-b)^a,$$

jos $b > 0$ sillä $C_1 \cap C_2 \cap \ldots C_b = \emptyset$.
Tiedämme kaikkien kuvausten lukumääräksi b^a, joten surjektioiden lukumäärä on

$$b^a - |C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_b| = b^a - \sum_{k=1}^{b}(-1)^{k+1}\binom{b}{k}(b-k)^a = \sum_{k=0}^{b}(-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^a.$$

Viimeiseksi jos $b = 0$, niin täytyy olla $a = 0$ sillä muuten ei ole edes olemassa yhtään kuvausta joukolta A joukolle B. Tyhjä kuvaus on tällöin ainoa kuvaus A:lta B:lle ja 'tyhjän joukon logiikalla' se on surjektio, joten surjektioita on tasan yksi.

5. $\star\star$Kirjapainossa laitetaan kannet 12 kirjalle. Mahdolliset kansivärit ovat sininen, punainen ja ruskea. Kuinka monella tavalla kirjojen kansivärit voidaan valita, jos vaaditaan, että jokainen väri on käytössä vähintään kerran?

   Ratkaisu 5. Vertaisarvioitavaan tehtävään tulee ratkaisu erikseen Moodleen.

6. ⋆ Kuinka monella tavalla voidaan järjestää sanan $TERAKOTA$ kirjaimet, jos vaaditaan, että mitkään kaksi samaa kirjainta (A-kirjaimet ja T-kirjaimet) eivät ole peräkkäin? (Kaksi järjestystä on samat, jos ne muodostavat saman sanan, vaikka niissä näennäisesti olisikin esimerkiksi A-kirjaimet vaihdettu keskenään.)

   Ratkaisu 6. Sanassa $TERAKOTA$ on 8 kirjainta, joten kaiken kaikkiaan järjestämällä kirjaimet uudestaan saadaan 8! erilaista sanaa. Kuitenkin sellaiset sanat, joissa muut kirjaimet pysyvät paikallaan ja kaksi A:ta vaihtaa keskenään paikkaa lasketaan samaksi sanaksi sillä kahta A:ta ei pidetä erillisinä objekteina, joten joudumme jakamaan luvulla 2!. Edelleen samalla periaattella jaamme uudestaan luvulla 2! kun huomioimme, että myös tutkittavan sanan kahta T:tä ei pidetä erillisinä objekteina. Kaiken kaikkiaan sanasta $TERAKOTA$ voidaan siis muodostaa

$$\frac{8!}{2!2!}$$

   erilaista sanaa. Seuraavaksi haluamme poistaa tästä joukosta sellaiset sanat, joissa on kaksi A:ta tai kaksi T:tä peräkkäin. Jos sanassa on kaksi A:ta peräkkäin niin voidaan ajatella peräkkäisiä a-kirjaimia yhtenä kirjaimena 7-kirjaimisessa sanassa. Tälläisiä sanoja on

$$\frac{7!}{2!}$$

   kappaletta. Vastaavasti sellaisia sanoja, joissa kaksi T-kirjainta on peräkkäin on sama määrä kuin sanoja, jossa kaksi A:ta on peräkkäin.
   Jos nyt vähennämme nämä sanat kaikkien sanojen joukosta tulemme kuitenkin vähentäneeksi kahdesti sellaiset sanat, joissa sekä kaksi A:ta että kaksi T:tä on peräkkäin. Ajatellaan taas kahta A-kirjainta yhtenä kirjaimena ja kahta T:kirjainta yhtenä kirjaimena, jolloin muodostamme sanoja kuudesta erillisestä kirjaimesta. Tälläisten sanojen lukumäärän tiedämme olevan 6!.
   Inkluusio-ekskluusio -periaatteen nojalla sanoja, joissa mitkään kaksi samaa kirjainta eivät ole peräkkäin on siis

$$\frac{8!}{2!2!} - (2 \cdot \frac{7!}{2!}) + 6! = 6!(2 \cdot 7 - 7 + 1) = 720 \cdot 8 = 5760$$

7. (a) Kuinka monta erilaista sanaa voidaan muodostaa kirjaimista $AABCD$? (Huom! Sanojen ei tarvitse kuulua mihinkään luonnolliseen kieleen, eri selvitetään vain erilaisten järjestysten määrää.)

   (b) Kuinka monessa näistä sanoista ei kumpikaan A-kirjaimista ole alkuperäisellä paikallaan?

   Ratkaisu 7. (a) Vastaavasti kuin edellisessä tehtävässä otetaan huomioon, että kaksi sanaa ovat samat vaikka näennäisesti kaksi A-kirjainta vaihtaisivatkin paikkaa. Kaikkien sanojen määräksi saadaan

$$\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

(b) 'Sanassa' $AABCD$ A-kirjaimet sijaitsevat ensimmäisellä ja toisella paikalla. Jos muodostetetaan näistä kirjaimista uusi sana, jossa kumpikaan ei ole alkuperäisellä paikalla, niin A-kirjaimet sijaitsevat uudessa sanassa kolmannella, neljännellä tai viidennellä paikalla. Loput kirjaimet voidaan A-kirjainten paikoilleen laittamisen jälkeen laittaa miten vain, joten kaiken kaikkiaan halutunlaisia sanoja saadaan

$$\binom{3}{2} \cdot 3! = \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 6 = 18.$$

8. Jatketaan vielä edellisen tehtävän sanojen parissa.

   (a) Kuinka monessa molemmat A-kirjaimet ovat A-kirjainten alkuperäisillä paikoilla

   (b) Kuinka monessa tasan yksi A-kirjain on sellaisella paikalla, jolla alunperinkin oli A-kirjain?

   Ratkaisu 8. (a) Pidettäessä A-kirjaimet paikalleen jää meille enää valinnaksi miten kirjaimet B, C ja D sijoitetaan lopuille kolmelle paikalle. Tämä voidaan tehdä $3! = 6$ erilaisella tavalla.

   (b) Ensimmäinen A-kirjain sijoitetaan A-kirjainten alkuperäisille paikoille. Tämä voidaan tehdä kahdella eri tavalla. Sen jälkeen toinen A-kirjain sijoitetaan siten, että se ei sijaitse A-kirjainten alkuperäisillä paikoilla. Tämä sijoitus voidaan tehdä kolmella tavalla. Viimeiseksi loput kirjaimet sijoitetaan 3! tavalla vapaille paikoille. Kaiken kaikkiaan halutunlaisia sanoja on siis

$$2 \cdot 3 \cdot 3! = 36.$$

9. $\star$ Käsitellään vielä yhden tehtävän verran edellisten tehtävien sanoja. Kuinka monessa sanassa ei yksikään kirjain ole alkuperäisellä paikallaan? (A-kirjaimet ovat keskenään samanlaisia, eli tämä ehto tarkoittaa sitä, että kumpikaan kahdesta ensimmäisestä kirjaimesta ei voi olla A.)

   Ratkaisu 9. A-kirjaimet voidaan sijoittaa $\binom{3}{2} = 3$ tavalla, siten että kumpikaan A-kirjaimista ei ole alkuperäisellä paikallaan. Tämän jälkeen loput kirjaimet voidaan sijoittaa jokaista tälläistä A-kirjainten sijoitusten valintaa kohden $3! = 6$ tavalla. Kuitenkin näistä kuudesta järjestyksestä kaksi on aina sellaisia, joissa joku alkioista B, C, D pysyy paikoillaan. Kaiken kaikkiaan sanoja, joissa yksikään kirjain ei ole alkuperäisellä paikallaan on siis

$$3 \cdot (6 - 2) = 12.$$

10. $\star$ Osoita, että 10×10-lautaa ei voida peittää 1×4-palikoilla.

   Ratkaisu 10. Tehtävä vaikuttaa vastaavalta tehtävältä kuin kurssin monisteessa, mutta yhtä ulottuvuutta alempana. Koitetaan edetä samaan tyyliin.
   Voidaan siis ajatella 10×10-laudan sijaitsevan tavallisessa 'x, y'-koordinaatistossa,

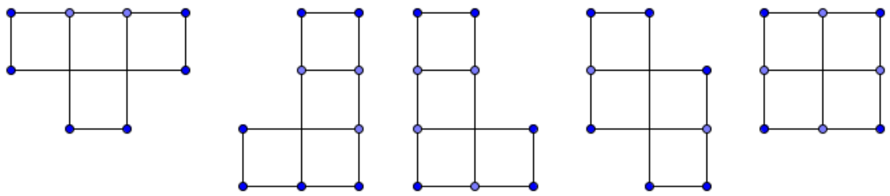
siten että esimerkiksi laudan vasen alakulma sijaitsee origossa ja oikea yläkulma sijaitsee pisteessä $(9,9)$. Laudan ruudut voidaan siis ajatella koordinaatiston kokonaislukupisteinä (a,b), missä $0 \leq a,b \leq 9$, $a,b \in \mathbb{Z}$. Väritetään lauta seuraavasti: lasketaan jokaiselle laudan pisteelle (a,b) jakojäännös summalle $a+b$ luvulla 4 jaettaessa ja väritetään piste (ruutu) jakojäännöksen mukaan punaiseksi, jos jakojäännös on nolla, vihreäksi, jos jakojäännös on yksi, siniseksi, jos jakojäännös on kaksi ja keltaiseksi jos jakojäännös on kolme.
Seuraavaksi tehdään huomio, että asettaessa 1×4-palikka laudalle koordinaattiakselien suuntaisesti se peittää neljä ruutua, jotka ovat vielä kaikki erivärisiä. Jos siis olisi mahdollista peittää 10×10-lauta 1×4-palikoilla olisi värityksessämme kaiken värisiä ruutuja yhtä paljon eli täsmälleen $100/4 = 25$ kappaletta.
Tutkitaan aluksi 8×8 -neliötä, johon kuuluvat pisteet (a,b), joilla $0 \leq a,b \leq 7$. Huomataan, että jokaisella $0 \leq k \leq 7$, $k \in \mathbb{Z}$ joukossa $\{k\} \times \{j \mid 0 \leq j \leq 7,\ j \in \mathbb{Z}\}$ on kahdeksan pistettä joiden väri on helppo laskea ja todeta, että jokaista väriä tässä joukossa esiintyy tasan kaksi kertaa. Siis 8×8-neliössä on jokaista väriä yhtä paljon.
Siirrytään nyt tutkimaan joukkoa $A = \{8,9\} \times \{j \,|\, 0 \leq j \leq 7,\ j \in \mathbb{Z}\}$. Voidaan jakaa tämä joukko kahteen palaseen: $\{8\} \times \{j \,|\, 0 \leq j \leq 7, j \in \mathbb{Z}\}$ ja $\{9\} \times \{j \,|\, 0 \leq j \leq 7, j \in \mathbb{Z}\}$. Vastaavasti kuin edellä huomataan, että kummassakin palasessa on jokaisen värisiä ruutuja tasan kaksi kappaletta. Siis myös joukossa A on kaikkia värejä yhtä paljon.
Samaan tapaan voidaan käydä läpi joukko $B = \{k \mid 0 \leq k \leq 7,\ k \in \mathbb{Z}\} \times \{8,9\}$.
Tutkimatta on enää neljä pistettä: $(8,8), (8,9), (9,8), (9,9)$. Piste $(8,8)$ saa värityksessämme punaisen kuosin, piste $(8,9)$ vihreän värin samoin kuin piste $(9,8)$ ja pisteen $(9,9)$ väritämme siniseksi. Huomaamme, että kaikkia värejä ei värityksessämme ole yhtä paljon, joten päättelemme, että emme voi peittää 10×10-lautaa 1×4-palikoilla.

11. $\star$ Suorakulmion muotoinen lattia on peitetty 2×2-laatoilla ja 1×4-laatoilla. Varastossa on jäljellä vielä yksi 1×4-laatta. Valitettavasti syystä tai toisesta yksi lattian 2×2-laatta menee rikki. Osoita, että lattia ei ole korjattavissa varastossa olevalla varapalikalla, vaikka kuinka yritettäisiin uudelleenjärjestää.

    Ratkaisu 11. Olkoon suorakulmion muotoinen lattia kokoa $n \times m$, $n,m \in \mathbb{N}$. Ajatellaan taas, että lattian ruudut vastaavat 'x,y'-koordinaatiston pisteitä (a,b), missä $0 \leq a \leq n$ ja $0 \leq b \leq m$, $n,m \in \mathbb{N}$. Väritetään nyt lattia mustalla ja valkoisella värillä seuraavasti: ruutu väritetään valkoiseksi, jos sen molemmat koordinaatit ovat parittomia, muussa tapauksessa se väritetään mustaksi. Esimerkiksi pisteet $(1,0)$ ja $(0,2)$ väritetään mustaksi, mutta piste $(1,1)$ väritetään valkoiseksi. (Kuvan piirtäminen auttaa hahmottamaan tilanteen.) Huomataan, että 1×4-laatta peittää aina 0 tai 2 valkoista ruutua, kun taas 2×2-laatta peittää aina täsmälleen yhden valkoisen ruudun.
    Olemme onnistuneet peittämään lattian 2×2-laatoilla ja 1×4-laatoilla, jolloin 2×2-laattojen lukumäärä kertoo tasan sen onko laattojen alle tehdyssä värityksessä pariton vai parillinen määrä valkoisia ruutuja. Jos 2×2-laattoja on parillinen määrä, myös valkoisia ruutuja on parillinen määrä, jos taas 2×2-laattoja on pariton määrä niin valkoisia ruutuja on pariton määrä. Oletetaan, että 2×2-laattoja on parillinen

määrä. Nyt yksi 2×2-laatta menee rikki, jolloin jää pariton määrä 2×2-laattoja, jotka peittävät parittoman määrän valkoisia ruutuja. Yksi 1×4-laatta ei nyt pelasta enää tilannetta koska 'alkuperäinen määrä 2×2-laattoja -1' + 'alkuperäinen määrä 1×4 -laattoja $+1$' peittää nyt joka tapauksessa parittoman määrän valkoisia ruutuja. Värityksessä on kuitenkin parillinen määrä valkoisia ruutuja, joten saadaan ristiriita. Vastaavasti käy jos alunperin 2×2-laattoja olikin pariton määrä.

12. Onko mahdollista peittää 4×5-suorakulmio seuraavilla viidellä palikalla?



Ratkaisu 12. Väritetään 4×5-suorakulmio shakkilautavärityksellä. Valkoisia ja mustia ruutuja tulee tällöin molempia kymmenen kappaletta. Tutkitaan tehtävän palikoita: Jokainen palikka peittää kyllä neljä ruutua ja palikoita on viisi, joten periaatteessa suorakulmiomme voitaisiin mahdollisesti peittää kuvan palikoilla. Tarkempi tutkinta kuitenkin selkeyttää, että kaikki muut palikat T-palikkaa lukuunottamatta peittävät kaksi mustaa ja kaksi valkosita ruutua. T-palikka kuitenkin peittää aina kolme valkoista ja yhden mustan ruudun tai kolme mustaa ja yhden valkoisen ruudun. Jos siis voisimme peittää suorakulmion tehtävän viidellä palikalla olisi värityksessämme mustien ja valkoisten ruutujen lukumäärien erotuksen itseisarvo kaksi. Näin ei kuitenkaan ole, joten 4×5-suorakulmiota ei voi peittää tehtävän palikoilla.

13. Osoita, että 8×8-lautaa ei voida peittää 15 T-palikalla ja yhdellä neliöpalikalla. (T-palikka on edellisen kuvan ensimmäinen palikka ja neliöpalikka viimeinen.)

Ratkaisu 13. Käytetään taas shakkilautaväritystä eli väritetään joka toinen laudan ruutu valkoiseksi ja joka toinen mustaksi. Mustia ja valkoisia ruutuja on siis värityksessämme 32 molempia.
Neliöpalikka peittää kaksi mustaa ja kaksi valkoista ruutua kun taas T-palikka peittää aina kolme mustaa ja yhden valkoisen ruudun tai kolme valkoista ja yhden mustan ruudun. Tällöin kahden T-palikkan peittämien mustien ja valkoisten ruutujen erotuksen itseisarvo on neljällä jaollinen (0 tai 4). Tästä seuraa, että minkä tahansa parillisen määrän T-palikoita peittämien mustien ja valkoisten ruutujen erotuksen itseisarvo on neljällä jaollinen. Erityisesti siis 14 T-palikkaa peittää valkoisia ja mustia ruutuja joko yhtä paljon tai jompia kumpia neljällä jaollisen määrän enemmän. Jos 14 T-palikkaa peittää yhtä monta mustaa ja valkoista ruutua, niin laittamalla vielä neliöpalikka ja viimeinen T-palikka paikoilleen ei peitettyjen valkoisten ja mustien ruutujen määrä mene tasan. Samoin käy myös jos 14 T-palikkaa peittää valkoisia tai

mustia ruutuja neljällä jaollisen määrän enemmän kuin toisia.
Siis 8×8-laudan peittäminen kyseisillä palikoilla ei onnistu.

14. Huoneessa on 17 ihmistä. Nämä tervehtivät toisiaan seuraavasti: Osa mahdollisesti kättelee, osa mahdollisesti kumartaa toisilleen, ja osa mahdollisesti jättää tervehtimättä. Tervehdys, kuten myös sen tekemättä jättäminen on kaksipuoleista: joko kaksi henkilöä tervehtii toisiaan samoin (eli molemmat kättelevät tai molemmat kumartavat) tai jättää tervehtimättä. Ketkään kaksi eivät myöskään tervehdi toisiaan yli yhtä kertaa. Osoita, että huoneesta löytyy kolmen hengen joukko, niin, että kaikki joukon jäsenet ovat tervehtineet toisiaan samoin tai jättäneet tervehtimättä.

    Ratkaisu 14. Voidaan mallintaa tilannetta verkolla, jossa on 17 pistettä (yksi piste jokaista ihmistä kohti) ja eri värisiä viivoja pisteiden välillä sen mukaan miten ihmiset tervehtivät toisiaan. Jos kaksi ihmistä kättelevät toisiaan, piirretään näitä ihmisiä vastaavien pisteiden välille sininen viiva. Jos kaksi ihmistä taas kumartavat toisilleen, piirretäänkin näitä ihmisiä vastaavien pisteiden välille punainen viiva. Viimeiseksi jos kaksi ihmistä jättävät tervehtimättä toisensa, piirretään näitä ihmisiä vastaavien pisteiden välille vihreä viiva.
    Valitaan nyt mikä tahansa piste, vaikkapa a ja tutkitaan siitä lähteviä viivoja. Pisteestä a lähtevien viivojen lukumäärä on 16 ja värejä on kolme. Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla jonkun värisiä viivoja on tällöin vähintään 6. Voidaan olettaa, että valitsemastamme pisteestä lähtee vaikkapa vähintään kuusi vihreää viivaa. Tutkitaan nyt niiden pisteiden joukkoa A joihin tutkimastamme pisteestä a lähtee vihreä viiva. Jos näiden pisteiden joukosta löytyy kaksi pistettä, sanotaan b ja c, joita vastaavat ihmiset jättävät kättelemättä toisiaan piirretään näiden pisteiden välille vihreä viiva, jolloin pisteet a, b ja c muodostavat vihreän kolmion eli näitä pisteitä vastaavat ihmiset toteuttavat halutun väitteen.
    Jos taas joukosta A ei löydy kahta pistettä, joiden välille olisi piirretty vihreä viiva on joukossa A vähintään kuusi pistettä ja vain sinisiä ja punaisia viivoja näiden pisteiden välillä. Valitaan nyt mikä tahansa piste joukosta A, nimitetään valitsemaamme pistettä vaikka d:ksi. Pisteestä d lähtee siis joukon A pisteisiin vain punaisia tai sinisiä viivoja, joten kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla joko sinisiä tai punaisia viivoja on vähintään kolme (kaksi väriä, vähintään 5 viivaa). Voidaan taas olettaa, että vaikkapa sinisiä viivoja on vähintään kolme. Tutkitaan nyt niiden pisteiden joukkoa B joihin pisteestä d lähtee sininen viiva, tässä joukossa on siis vähintään kolme alkiota. Jos näiden pisteiden joukosta löytyy pisteet e ja f, joiden välillä on sininen viiva, niin pisteet d, e ja f muodostavat sinisen kolmion eli näitä pisteitä vastaavat ihmiset tervehtivät samalla tavalla. Jos taas joukosta B ei löydy kahta pistettä joiden välillä on sininen viiva niin joukon B pisteiden välillä on vain punaisia viivoja, jolloin väitteen toteuttavat ihmiset löytyvät joukosta B.