Kombinatoriikan kurssin ensimmäiset laskuharjoitukset
Malliratkaisuja

Sauli Tikka

29. toukokuuta 2015

Tehtävät, jotka on merkitty tähdellä $\star$ käydään läpi laskuharjoituksissa. Tehtävä, joka on merkitty kahdella tähdellä $\star\star$ palautetaan Moodlessa vertaisarvioitavaksi.

Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

1. Laske

   (a) $\binom{7}{3}$

   (b) $\binom{4}{6}$.

   (c) $5!$

   Ratkaisu 1. Binomikerroin $\binom{n}{k}$ kertoo sen kuinka monta k-alkioista osajoukkoa voidaan n-alkioisesta joukosta valita. *Kertoman* $n!$ avulla tämä voidaan helposti lausua muodossa

   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{aina kun } n, k \in \mathbb{N} \text{ ja } k \leq n.$$

   Jokaisella $n > 0$ sen sijaan pätee $n! = 1 \cdots n$.

   (a)
   $$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 7 \cdot 5 = 35.$$

   (b)
   $$\binom{4}{6} = 0,$$

   sillä eihän 4-alkioisesta joukosta voida valita yhtään 6-alkioista osajoukkoa.

   (c)
   $$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

2. Miten monella tavalla kuusi lasta voidaan laittaa jonoon?

   Ratkaisu 2. Jokainen lapsi vastaa yhtä, erillistä objektia. Tehdään ilkeästi ja numeroidaan lapset: Lapsi 1, Lapsi 2, ..., Lapsi 6. Oleellista on, että esimerkiksi sillä onko Lapsi 1 jonossa ensimmäisenä ja Lapsi 2 jonossa kolmantena vai toisin päin on siis merkitystä.
   Lapsi 1. voidaan nyt laittaa jonossa mille tahansa paikalle, joita on 6. Lapsi 2 voidaan tämän jälkeen laittaa jäljellä olevista 5:stä paikasta mille tahansa. Näin jatketaan kunnes Lapsi 6 laitetaan jäljellä olevalle viimeiselle paikalle. Erilaisia tapoja asettaa lapset jonoon on siis

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720.$$

3. ⋆ Kolmenkymmenen oppilaan luokka tarvitsee viiden hengen komitean luokkaretken järjestämiseen. Miten monella tavalla komitea voidaan valita?

   Ratkaisu 3. Tehtävässä on kyse siitä, kuinka monta erilaista 5-osajoukkoa voidaan joukosta [30] valita. Alkioiden järjestyksellä ei ole väliä, joten komitea voidaan valita

$$\binom{30}{5} = \frac{30!}{5!(30-5)!} = \frac{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 29 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13 = 142506$$

   tavalla.

4. ⋆⋆ Kolmenkymmen oppilaan luokka tarvitsee luokkaretken järjestämiseen komitean, jolla on puheenjohtaja ja neljä muuta keskenään tasa-arvoista jäsentä. Miten monella tavalla komitea voidaan valita?

   Ratkaisu 4. Vertaisarvioitavaan tehtävään tulee ratkaisu erikseen kurssin Moodle-ympäristöön.

5. Kolmenkymmenen oppilaan luokka tarvitseen luokkaretken järjestämiseen komitean, jolla on puheenjohtaja, sihteeri ja kolme muuta keskenään tasa-arvoista jäsentä. Miten monella tavalla komitea voidaan valita?

   Ratkaisu 5. Voidaan ajatella, että komiteassa ensimmäistä paikkaa vastaa puheenjohtajan paikka, toista paikkaa sihteerin paikka ja viimeistä kolmea paikkaa vastaa tasa-arvoisten jäsenten paikat Valitaan puheenjohtaja ensin, jolloin valinta voidaan tehdä 30 tavalla. Sihteeri voidaan tämän jälkeen valita 29 tavalla ja lopulta kolmen tasa-arvoisen valinta vastaa 3-osajoukkojen valintaa joukosta [28]. Komitea voidaan siis valita

$$30 \cdot 29 \cdot \binom{28}{3} = 30 \cdot 29 \cdot \frac{26 \cdot 27 \cdot 28}{2 \cdot 3} = 30 \cdot 29 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 28 = 2850120$$

   tavalla.

6. ⋆ Laske $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}$.

Ratkaisu 6. Binomilause sanoo, että kaikilla $n \in N$ ja $x, y \in \mathbb{R}$ pätee

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Huomataan nyt, että tehtävänannon summa on lähes binomilauseen summalausekkeen näköinen. Luku -1 vastaa x:ää, mutta y:tä vastaava luku puuttuu vielä. Toisaalta voimme jokaisella $k = 1, \ldots, n$ kertoa summassa k:nnen termin luvulla $1^{n-k} = 1$ eikä summa muutu. Binomilauseen nojalla pätee

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j 1^{n-k} \binom{n}{j} = (-1+1)^n = 0^n.$$

Jos $n > 0$, niin $0^n = 0$. Tapauksessa $n = 0$ taas pätee $0^0 = 1$ (Tämä on määritelmä).

7. $\star$ Olkoon joukon A alkioiden lukumäärä a ja joukon B alkioiden lukumäärä b. Kuinka monta kuvausta on joukolta A joukolle B? (Vihje: kokeile vaikka pienillä joukoilla aluksi, listaa esimerkiksi kaikki kuvaukset, jotta tilanne hahmottuu.)

   Ratkaisu 7. Jos f on kuvaus joukolta A joukolle B, niin jokainen A:n a:sta alkiosta kuvautuu täsmälleen yhdelle joukon B b:stä alkiosta. Jokainen joukon A alkio voidaan toisistaan riippumatta kuvata jollekin joukon B alkiolle, joten jokaisella alkiolla a on b mahdollisuutta jolle se voi kuvautua. Näin ollen kuvauksia joukolta A joukolle B on

$$\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{\text{a kpl}} = b^a.$$

   Voi myös ajatella, että kuvausta f vastaa a:n pituinen jono B:n alkioita eli joukon B^a alkio (kyseessä siis tulojoukko, joka koostuu a:n pituisista jonoista B:n alkioita). Tämä vastaavuus on lisäksi yksikäsitteinen eli bijektiviinen. Näin ollen kaikkien kuvausten lukumäärä joukolta A joukolle B on sama kuin joukon B^a koko eli b^a.

8. (a) Olkoon joukon A alkioiden lukumäärä neljä ja joukon B alkioiden lukumäärä kuusi. Kuinka monta injektiota on joukolta A joukolle B?

   (b) Olkoon joukon A alkioiden lukumäärä a ja joukon B alkioiden lukumäärä b. Kuinka monta injektiota on joukolta A joukolle B?

   Ratkaisu 8. (a) Injektiivisessä kuvauksessa kaksi eri alkiota kuvautuvat aina eri alkioille. Nyt $|A| = 4$ ja $|B| = 6$ ja tutkitaan kuvauksia $f : A \to B$. Injektiivisen kuvauksen kuvajoukossa on siis täsmälleen 4 alkiota. Meitä kiinnostaa kuinka monta erilaista 4 alkion joukkoa voidaan 6:n alkion maaliavaruudesta B valita. Toisaalta myös sillä on merkitystä missä järjestyksessä kuva-alkiot luetellaan eli kyse on joukon B 4-permutaatioista. Näitä on tasan

$$\frac{6!}{(6-4)!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360.$$

   Tämä on injektioiden määrä 4-joukolta 6-joukolle.

(b) Yleistämällä (a)-kohdan päättelyä saadaan, että a-alkioiselta joukolta A b-alkioiselle joukolle B on täsmälleen

$$\frac{b!}{(b-a)!}$$

injektiota, aina kun $a \leq b$. Tätä voi myös ajatella niin, että numeroidaan joukon A alkiot seuraavasti $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_a\}$. Ensimmäinen alkio x_1 voidaan kuvata täsmälleen b tavalla. Jotta injektiivisyys säilyisi, voidaan toinen alkio x_2 kuvata enää $b-1$ tavalla, kunnes lopulta viimeiselle alkiolle x_a jää $b-a+1$ vaihtoehtoa. Tuloperiaatteen nojalla erilaisia vaihtoehtoja on siis

$$b \cdot (b-1) \cdots (b-a+1) = \frac{b!}{(b-a)!}.$$

Jos $a > b$ niin esimerkiksi kyyhkyslakkaperiaatten nojalla väistämättä 2 alkiota kuvautuu samalle alkiolle missä tahansa kuvauksessa $f : A \to B$, joten injektioita on 0 kappaletta.

9. Tällä hetkellä näyttää siltä, että Suomeen tulee kolmen puolueen ja 12 salkun (eli erilaisten ministeritehtävien) hallitus. Kuinka monella tavalla salkut voidaan jakaa tasan puolueiden kesken, eli kuinka monella tavalla voidaan salkut jakaa niin, että kukin hallituspuolue saa neljä salkkua? (Salkut ovat erilaisia. Se huomioidaan laskussa. Ei kuitenkaan huomioida sitä, miten puolueen sisällä salkut voivat jakautua. Lisäksi jätetään huomiotta perinteet esimerkiksi pääministerin salkun päätymisestä hallitustunnustelijalle.)

   Ratkaisu 9. Ensinnäkin jokainen puolue saa siis 4 salkkua, jotta salkkujen määrä menisi tasan. Salkkujen jako voidaan jakaa kahteen osatehtävään: 1. Valitaan 12 salkun joukosta 4 ensimmäiselle puolueelle (esim. Keskusta) ja 2. Valitaan jäljelläolevista 8:sta salkusta 4 toiselle puolueelle (esim. PS). Viimeiset neljä salkkua jäävät tällöin viimeiselle puolueelle. Tuloperiaatteen nojalla erilaisia tapoja jakaa salkut on siis

$$\begin{aligned}\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} &= \frac{12!}{4!8!} \cdot \frac{8!}{4!4!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= 9 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 = 34650.\end{aligned}$$

10. Miten monella tavalla voi kolme punaista, kolme sinistä ja kolme valkoista helmeä järjestää jonoon?

   Ratkaisu 10. Voidaan ajatella, että meillä on 9-paikkainen helminauha, johon tehtävän helmet halutaan asettaa. Tämä voidaan taas jakaa kahteen osatehtävään, joista ensimmäinen on, että asetetaan 3 punaista helmeä mille tahansa yhdeksästä paikasta. Sen jälkeen toinen osatehtävä on, että jäljelläoleviin kuuteen paikkaan laitetaan 3 sinistä helmeä. Valkoisille helmille ei tämän jälkeen jää enää valinnanvaraa vaan ne laitetaan juuri sinne minne ne menevät. Olennaista tässä tietysti on, että keskenään samanväriset pallot ovat samanlaisia eikä siis ole merkitystä minkälaisessa järjestyksessä ne keskenään ovat. Erilaisia tapoja on siis

$$\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 1680.$$

11. *Alkuluvuksi* kutsutaan sellaista positiivista kokonaislukua, joka on suurempi kuin yksi, ja joka ei ole jaollinen millään muulla positiviisella kokonaisluvulla kuin luvulla yksi ja luvulla itsellään (jaollisuus tarkoittaa, että jako menee tasan). Ensimmäiset alkuluvut ovat siis $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$. Niitä positiivisia kokonaislukuja, joilla luku on jaollinen, kutsutaan luvun jakajiksi eli tekijöiksi.

    (a) Luettele luvun $27 = 3^3$ tekijät.

    (b) Luettele luvun p^r tekijät, kun p on alkuluku ja r positiivinen kokonaisluku. Kuinka monta tekijää luvulla p^r on?

    Ratkaisu 11. (a) Luvun 27 tekijät ovat $1, 3, 9, 27$.

    (b) Olkoon siis p alkuluku ja $r \in \mathbb{Z}$, $r > 0$. Osoitetaan, että luvun p^r tekijät ovat luvut $1, p, p^2, \ldots, p^{r-1}, p^r$.
    Jos $n|p^r$, niin on olemassa $m \in \mathbb{Z}$ s.e $p^r = nm$. Esitetään tulo nm alkulukujen tulona. Jos yksikin tämän tulon alkuluvuista ei ole p niin jakamalla puolittain yhtälö $p^r = nm$ tällä alkuluvulla q saadaan, että $q|p^r$ missä $q \neq p$. Kuitenkin tästä seuraa tunnetun lukuteorian perustuloksen nojalla, että joko (1) $q|p$ tai (2) $q|p^{r-1}$. Koska (1) ei toteudu, pätee (2). Jatkamalla näin päättelyä, saadaan lopulta, että $q|p$, mikä on ristiriita. Siis tulon nm alkutekijähajotelmassa ei esiinny muita alkulukuja kuin p. Näin ollen $n = p^k$, jollakin $0 \leq k \leq r$. Lisäksi koska k voidaan valita $r + 1$ tavalla on tekijöitä $r + 1$ kappaletta.

12. ⋆ Tämän tehtävän tarkoitus on todistaa seuraava tärkeä lukuteorian lause: Jos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, missä luvut $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ovat keskenään erisuuria alkulukuja, niin luvulla n on $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ tekijää.

    (a) Mitkä ovat luvun $24 = 2^3 \cdot 3$ tekijät? Miten monta niitä on?

    (b) Millaisia ovat luvun $p^r q^s$ tekijät, kun $p \neq q$ ovat alkulukuja ja r ja s ovat positiivisia kokonaislukuja? Miksi niitä on yhteensä $(r + 1)(s + 1)$ kappaletta?

    (c) Perustele miksi tehtävänannon väite pätee, eli miksi luvulla $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ on $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ tekijää.

    Ratkaisu 12. (a) Luvun $24 = 2^3 \cdot 3$ tekijät ovat $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$. Tekijöitä on $(1 + 1)(3 + 1) = 8$ kappaletta.

    (b) Olkoon $p \neq q$ ovat alkulukuja ja r, s positiivisia kokonaislukuja. Osoitetaan, että luvun $p^r q^s$ kaikki tekijät ovat muotoa $p^k s^j$ joillakin $0 \leq k \leq r$ ja $0 \leq j \leq s$. Kuten edellisen tehtävän kohdassa (b) osoitetaan, että luvun $p^r q^s$ kaikki tekijät ovat haluttua muotoa. k voidaan valita $r + 1$ tavalla ja j $s + 1$ tavalla. Nyt tekisi mieli sanoa jo, että tekijöitä on juuri $(r + 1)(s + 1)$ kappaletta. Periaatteessa voisi kuitenkin käydä niin, että joillakin valinnoilla $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, r\}$, $k_1 \neq k_2$ ja $j_1, j_2 \in \{0, \ldots, s\}$, $j_1 \neq j_2$ pätisi

$$p^{k_1} q^{j_1} = p^{k_2} q^{j_2}.$$

Voidaan olettaa, että $k_2 > k_1$, jolloin jakamalla luvulla p^{k_1} puolittain saadaan

$$q^{j_1} = p^{k_2 - k_1} q^{j_2}.$$

Nyt ei voi päteä, että $j_2 > j_1$, joten $j_2 < j_1$. Jaetaan edelleen puolittain luvulla q^{j_2}, jolloin saadaan

$$q^{j_1 - j_2} = p^{k_2 - k_1}.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, joten tälläisiä valintoja ei voida tehdä. Tekijöitä on siis tismalleen $(r+1)(s+1)$ kappaletta.

(c) Käytetään yleistykseen induktiota luvussa $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ olevan luvun k suhteen eli luvussa n esiintyvien erillisten alkulukujen määrän suhteen.
Alkuaskel ($k = 1$) seuraa edellisen tehtävän kohdasta (b).
Oletetaan sitten, että väite on todistettu kaikille luvuille $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, joissa erillisiä alkulukuja p_k on k kappaletta. Tutkitaan nyt lukua

$$m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k} q_{k+1}^{\alpha_{k+1}}.$$

Tässä siis erillisiä alkulukuja on $k+1$ kappaletta. Nyt induktio-oletuksen nojalla luvulla

$$m' = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k}$$

on täsmälleen $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ tekijää ja luvulla

$$q_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$$

on $\alpha_{k+1} + 1$ tekijää. Oleellisesti (b)-kohdasta seuraa, että luvulla m on tasan $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)(\alpha_{k+1} + 1)$ tekijää, jotka ovat muotoa

$$q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_k^{\beta_k} q_{k+1}^{\beta_{k+1}},$$

joillakin luvuilla $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ kaikilla $1 \leq i \leq k+1$. Induktioperiaatten nojalla väite pätee siis kaikilla luvuilla $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

13. $\star$ Olkoot annettu 50 eri positiivista kokonaislukua, jotka ovat kaikki pienempiä kuin 99. Osoita, että joidenkin kahden näistä summa on yhtä kuin 99.

Ratkaisu 13. On siis annettu 50 eri positiivista kokonaislukua joukosta $A = \{1, 2, \ldots, 97, 98\}$. Jaetaan joukko A 49:ään lokeroon: $\{1, 98\}, \{2, 97\}, \ldots, \{49, 50\}$. Lokerointi tarkoittaa tässä sitä, että jos valitsemme luvun joukosta A, niin tiedämme mihin lokeroon sen laitamme. Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla annetusta 50 luvusta siis kaksi on jossakin näistä lokeroista. Nämä kaksi lukua summautuvat luvuksi 99.

14. Suuressa konferenssissa osallistujat kättelevät toisiaan. Kukaan ei kättele ketään yli yhtä kertaa, eikä kukaan kättele itseään. Sen sijaan osa osallistujista saattaa jättää kaikki toiset kättelemättä. Osoita, että konferenssissa on kaksi osallistujaa, jotka ovat kätelleet täsmälleen yhtä monta kertaa. (Vihje: Mikä on pienin, ja mikä suurin mahdollinen kättelyjen määrä? Voivatko pienin ja suurin mahdollinen toteutua yhtä aikaa? Testaa vaikka pienillä luvuilla aluksi. Kyyhkyslakkaperiaate on iloinen asia.)

Ratkaisu 14. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ konferenssiin osallistuvien ihmisten määrä. Jos joku osallistujista jättää kaikki kättelemättä hän kättelee 0 kertaa. Jos joku osallistujista taas on niin ahkera kättelijä, että hän kättelee jokaisen osallistujan kerran (ei kuitenkaan itseään), joutuu hän kättelemään $n-1$ kertaa. Kuitenkin jos yksikin ihminen, sanotaan Herra X saapuu myöhässä, unohtuu baaritiskille, on bakteerikammoinen tai muuten vaan ei pidä kättelystä ei ahkerinkaan kättelijä, Herra Y, saa täyttä $n-1$:tä kättelyä täyteen vaan nimenomaan Herra X jää Herra Y:ltä kättelemättä. Näin ollen Herra Y saa vain $n-2$ kättelyä tililleen. Kääntäen jos Herra Y onnistuu kuin onnistuukin kättelemään täydet $n-1$ kertaa ei edes herra X onnistu välttämään herra Y:n kouraa. Siispä tällöin yksikään konferenssiin osallistujista ei jää kättelyittä. Voimme siis päätellä, että jonkun 0 kättelyä ja jonkun toisen $n-1$ kättelyä ovat toisensa poissulkevia tapahtumia.

Tutkitaan tilannetta, jossa 0 kättelyä ei ole mahdollista. Tällöin jokainen osallistuja kättelee $1-(n-1)$ kertaa. Toisaalta osallistujia on n kpl, joten kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla ainakin kaksi osallistujista kättelee yhtä monta kertaa.

Tilanne, jossa $n-1$ kättelyä on mahdottomuus on vastaava.

15. $\star$ Mikä on Pascalin kolmio? Mitä se kertoo summasta $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$? (Tämän voit toki laskea kombinatorisestikin perustellen tai binomikertoimien lausekkeiden avulla.) Laske Pascalin kolmion avulla summa

$$\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+\cdots+\binom{k+n}{n}.$$

(Vihje: Piirrä kuva, eli Pascalin kolmio!)

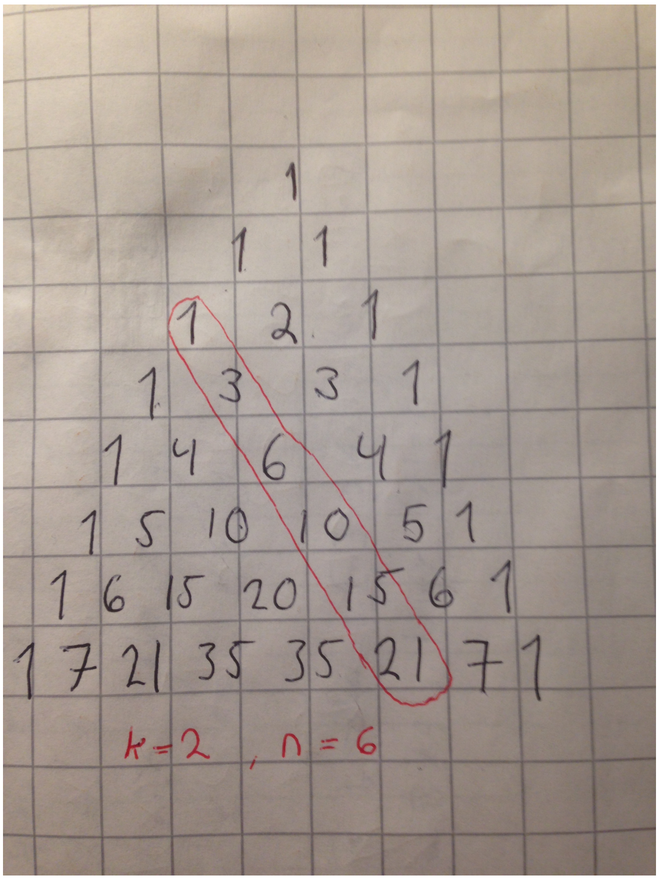
Ratkaisu 15. *Pascalin kolmio* on Pascalin identiteetistä

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N},\ k \in [n],\ 0<k<n$$

saatava kolmion muotoinen kaavio, johon on sijoitettu luvut $\binom{n}{k}$. Pascalin kolmion seuraavan rivin alkiot saadaan siis ylläolevan identiteetin avulla aina kahden edellisen rivin alkion summana.

Kuvasta 1 huomaamme, että jos summaamme punaisella ympyröidyistä luvuista vain 5 ensimmäistä saamme tulokseksi 35. Mutta tämä lukuhan löytyy juuri sopivasti ympyröidyistä viimeisen luvun 21 vierestä ja Pascalin identiteetistä tiedämme miten nämä kaksi lukua summautuvat. Tämä huomio antaa aiheen väittää, että

$$\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+\cdots+\binom{k+n}{n}=\binom{k+n+1}{n}.$$



Kuva 1: Pascalin kolmion 8 ensimmäistä riviä

Osoitetaan tämä induktiolla n:n suhteen. Kun $n = 0$, niin

$$\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0},$$

joten alkuaskel on ok.
Oletetaan sitten, että väite on todistettu kaikille luonnollisille luvuille, jotka ovat pienempiä kuin n. Tällöin

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \cdots + \binom{k+n}{n} + \binom{k+n+1}{n+1} \overset{i.o.}{=} \binom{k+n+1}{n} + \binom{k+n+1}{n+1} \underset{Pasc.id.}{=} \binom{k+n+2}{n+1}.$$

Siis väite pätee myös arvolla $n + 1$. Induktioperiaatteen nojalla väite pätee siis kaikilla $n \in \mathbb{N}$.