

## KOMBINATORIIKAN KURSSIN ENSIMMÄISET LASKUHARJOITUKSET

Tehtävät, jotka on merkitty tähdellä  $\star$  käydään läpi laskuharjoituksissa. Tehtävä, joka on merkitty kahdella tähdellä  $\star\star$  palautetaan Moodlessa vertaisarvioitavaksi.

Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

- (1) Laske
  - (a)  $\binom{7}{3}$
  - (b)  $\binom{4}{6}$ .
  - (c)  $5!$
- (2) Miten monella tavalla kuusi lasta voidaan laittaa jonoon?
- (3)  $\star$  Kolmenkymmenen oppilaan luokka tarvitsee viiden hengen komitean luokkaretken järjestämiseen. Miten monella tavalla komitea voidaan valita?
- (4)  $\star\star$  Kolmenkymmenen oppilaan luokka tarvitsee luokkaretken järjestämiseen komitean, jolla on puheenjohtaja ja neljä muuta keskenään tasa-arvoista jäsentä. Miten monella tavalla komitea voidaan valita?
- (5) Kolmenkymmenen oppilaan luokka tarvitseen luokkaretken järjestämiseen komitean, jolla on puheenjohtaja, sihteeri ja kolme muuta keskenään tasa-arvoista jäsentä. Miten monella tavalla komitea voidaan valita?
- (6)  $\star$  Laske  $\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j}$ .
- (7)  $\star$  Olkoon joukon  $A$  alkioden lukumäärä  $a$  ja joukon  $B$  alkioden lukumäärä  $b$ . Kuinka monta kuvausta on joukolta  $A$  joukolle  $B$ ? (Vihje: kokeile vaikka pienillä joukoilla aluksi, listaa esimerkiksi kaikki kuvaukset, jotta tilanne hahmottuu.)
- (8) (a) Olkoon joukon  $A$  alkioden lukumäärä neljä ja joukon  $B$  alkioden lukumäärä kuusi. Kuinka monta injektiota on joukolta  $A$  joukolle  $B$ ?  
(b) Olkoon joukon  $A$  alkioden lukumäärä  $a$  ja joukon  $B$  alkioden lukumäärä  $b$ . Kuinka monta injektiota on joukolta  $A$  joukolle  $B$ ?
- (9) Tällä hetkellä näyttää siltä, että Suomeen tulee kolmen puolueen ja 12 salkun (eli erilaisten ministeritehtävien) hallitus. Kuinka monella tavalla salkut voidaan jakaa tasan puolueiden kesken, eli kuinka monella tavalla voidaan salkut jakaa niin, että kukin hallituspuolue saa neljä salkkua? (Salkut ovat erilaisia. Se huomioidaan laskussa. Ei kuitenkaan huomioida sitä, miten puolueen sisällä salkut voivat jakautua. Lisäksi jätetään huomiotta perinteet esimerkiksi pääministerin salkun päätyemisestä hallitustunnustelijalle.)
- (10) Miten monella tavalla voi kolme punaista, kolme sinistä ja kolme valkoista helmeä järjestää jonoon?

- (11) *Alkuluvuksi* kutsutaan sellaista positiivista kokonaislukua, joka on suurempi kuin yksi, ja joka ei ole jaollinen millään muulla positiivisella kokonaisluvulla kuin luvulla yksi ja luvulla itsellään (jaollisuus tarkoittaa, että jako menee tasan). Ensimmäiset alkuluvut ovat siis 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, . . . . Niitä positiivisia kokonaislukuja, joilla luku on jaollinen, kutsutaan luvun jakajiksi eli tekijöiksi.
- (a) Luettele luvun  $27 = 3^3$  tekijät.
- (b) Luettele luvun  $p^r$  tekijät, kun  $p$  on alkuluku ja  $r$  positiivinen kokonaisluku. Kuinka monta tekijää luvulla  $p^r$  on?
- (12) ★ Tämän tehtävän tarkoitus on todistaa seuraava tärkeä lukuteorian lause: Jos  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ , missä luvut  $p_1, p_2, \dots, p_k$  ovat keskenään erisuuria alkulukuja, niin luvulla  $n$  on  $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$  tekijää.
- (a) Mitkä ovat luvun  $24 = 2^3 \cdot 3$  tekijät? Miten monta niitä on?
- (b) Millaisia ovat luvun  $p^r q^s$  tekijät, kun  $p \neq q$  ovat alkulukuja ja  $r$  ja  $s$  ovat positiivisia kokonaislukuja? Miksi niitä on yhteensä  $(r + 1)(s + 1)$  kappaletta?
- (c) Perustele miksi tehtävänannon väite pätee, eli miksi luvulla  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$  on  $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$  tekijää.
- (13) ★ Olkoot annettu 50 eri positiivista kokonaislukua, jotka ovat kaikki pienempiä kuin 99. Osoita, että joidenkin kahden näistä summa on yhtä kuin 99.
- (14) Suuressa konferenssissa osallistujat kättelevät toisiaan. Kukaan ei kättele ketään yli yhtä kertaa, eikä kukaan ei kättele itseään. Sen sijaan osa osallistujista saattaa jättää kaikki toiset kättelemättä. Osoita, että konferenssissa on kaksi osallistujaa, jotka ovat kätelleet täsmälleen yhtä monta kertaa. (Vihje: Mikä on pienin, ja mikä suurin mahdollinen kättelyjen määrä? Voivatko pienin ja suurin mahdollinen toteutua yhtä aikaa? Testaa vaikka pienillä luvuilla aluksi. Kyyhkyslakkaperiaate on iloinen asia.)
- (15) ★ Mikä on Pascalin kolmio? Mitä se kertoo summasta  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ? (Tämän voit toki laskea kombinatorisestikin perustellen tai binomikertoimien lausekkeiden avulla.) Laske Pascalin kolmion avulla summa

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \cdots + \binom{k+n}{n}.$$

(Vihje: Piirrä kuva, eli Pascalin kolmio!)