Kombinatoriikan kurssin kolmannet laskuharjoitukset
Malliratkaisuja
Sauli Tikka

11. kesäkuuta 2015

Tehtävät, jotka on merkitty tähdellä $\star$ käydään läpi laskuharjoituksissa. Tehtävä, joka on merkitty kahdella tähdellä $\star\star$ palautetaan Moodlessa vertaisarvioitavaksi. Tehtävät, jotka on merkitty ristillä † ovat hankalia (tai ainakin niiden on tarkoitus olla). Niitä tekemällä voi hankkia lisäpisteitä (1 piste/tehtävä), mutta näin hankittuja lisäpisteitä ei voi hyödyntää vertaisarviointitehtävien tai vertaisarvioinnin kompensointiin. (Tämän ei ole tarkoitus olla helppo tapa hyville opiskelijoille hankkia paljon pisteitä, vaan tarjota haasteita niitä kaipaaville sekä palkita, jos haasteen ottaa vastaan. Ennen kaikkea ajatus on se, että jos normaalit tehtävät tuntuvat helpoilta, niin näillä voi kompensoida, jos haluaa jättää jonkin helpoimmista tekemättä.) Niiden malliratkaisuja voi pyytää luennoitsijalta. Mitä useampi risti, sitä hankalampi tehtävä (vertaa sienikirja).

Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

1. Määritä rekursiivista jonoa $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ vastaava polynomiyhtälö, etsi sen ratkaisut ja anna luvulle a_n lauseke.

   Ratkaisu 1. Jonoa vastaava polynomiyhtälö saadaan rekursiivisen jonon määräävän kaavan kertoimista. Tehtävän jonon polynomiyhtälö on siis

   $$x^2 = 4x - 3.$$

   Tämä on toisen asteen polynomiyhtälö, jonka ratkaisut voidaan helposti etsiä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.
   Ratkaisuiksi saadaan

   $$\rho_1 = 1 \quad \text{ja} \quad \rho_2 = 3.$$

   Koska juuret ovat nyt erisuuria saadaan luvulle a_n lauseke juurien avulla,

   $$a_n = b_1\rho_1^n + b_2\rho_2^n = b_1 + b_2 3^n,$$

   missä $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

2. $\star$ Määritä rekursiivista jonoa $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ vastaava polynomiyhtälö, etsi sen ratkaisut ja anna luvulle a_n lauseke.

   Ratkaisu 2. Vastaavasti kuin edellä polynomiyhtälö on

$$x^2 = 2x - 1.$$

   Tällä yhtälöllä on vain yksi ratkaisu $\rho = 1$. Kyseessä on siis kaksinkertainen juuri. Kurssin lauseen 20 nojalla luvulle a_n saadaan nyt lauseke

$$a_n = \rho^n(b_1 + b_2 n) = b_1 + b_2 n,$$

   missä $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

3. Anna rekursiivisessa muodossa sen jonon määritelmä, joka kertoo miten monella tavalla luku n voidaan esittää sellaisten positiivisten kokonaislukujen summana, jotka ovat korkeintaan neljä. (Pyydetään siis luvun a_n lauseketta lukujen a_{n-1}, jne, avulla, sekä alkuehtoja.)

   Ratkaisu 3. Yrityksenä on siis konstruoida rekursiivinen määritelmä luvulle a_n, joka kertoisi kuinka monella tavalla luku n voidaan 'osittaa' positiivisiksi kokonaisluvuksi, jotka ovat suuruudeltaan korkeintaan neljä. 'Osittaa' on toinen tapa sanoa miten monella tavalla luku n voidaan esittää erilaisina summalausekkeina (esim. $n = (n-2) + 1 + 1$).
   Tehdään ensin huomioita pienillä luvuilla. $a_0 = 0$, sillä eihän lukua nolla voi esittää positiivisten kokonaislukujen summana, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ (1+1 ja 2), $a_3 = 4$ (1+1+1, 1+2, 2+1, 3) ja $a_4 = 8$ (1+1+1+1, 1+1+2, 1+2+1, 1+3, 2+1+1, 2+2, 3+1, 4). Osituksia voidaan jakaa erilaisiin luokkiin riippuen siitä onko ensimmäinen summattava yksi, kaksi, kolme tai neljä. On siis huomionarvoista tässä että esim. luvun kuusi ositukset $5 + 1$ ja $1 + 5$ vastaavat eri osituksia.
   Jos luvun n osituksen ensimmäinen summattava on yksi, niin jäljelle jäävästä osasta on muodostettava luvun $n - 1$ ositus. Jos ensimmäinen summattava on kaksi, niin ositetaan vielä luku $n-2$. Jos ensimmäinen summattava on kolme, niin muodostetaan vielä luvun $n - 3$ ositus ja viimeiseksi jos ensimmäinen summattava on luku neljä, niin loppuosasta muodostetaan luvun $n - 4$ ositus. Tätä suurempia summattavia ei osituksissamme esiinny tehtävänannossa annetun ehdon perusteella. Saadaan siis että

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}$$

   kaikilla $n \geq 5$. Alkuehdot $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8$ määrättiin edellä.

4. $\star$ $4 \times n$ alue laatoitetaan 1×4-laatoilla, joita voi kääntää. Anna rekursiivinen kaava, joka kertoo miten monella tavalla tämä voidaan tehdä, sekä alkuehdot. Määritä myös vastaava polynomiyhtälö.

   Ratkaisu 4. Meillä on siis suorakulmion muotoinen $4 \times n$ alue laatoitettavana 1×4-laatoilla. Halutaan siis määrittää luku a_n rekursiivisella kaavalla, joka kertoisi kuinka

monella tavalla laatoitus voidaan tehdä $4 \times n$ alueelle. Ensiksi huomataan, että $4 \times n$ alueen peittää täsmälleen n 1×4-laattaa. Toisaalta, laattoja voi kääntää eli asettaa alueelle aina 'vaaka'- tai 'pystysuoraan'. Ajatellaan siis, että 'pystysuoraan' tarkoittaa laatan asettamista alueen sen sivun suuntaisesti, jonka pituus on neljä ja 'vaakasuoraan' tarkoittaa laatan asettamista alueen sen sivun suuntaisesti, jonka pituus on n. Havaitaan nyt, että jos $n < 4$, niin vaakasuora asettaminen on mahdotonta, joten voimme asettaa laattoja vain pystysuoraan ja siis $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ (laatoilla ei siis ole keskenään eroa, eikä niiden keskinäisellä järjestyksellä ole eroa.) Jos taas $n = 4$, voimme edelleen asettaa neljä laattaa pystysuoraan, mutta voimme asettaa myös neljä laattaa vaakasuoraan. Toisaalta jos asetamme yhdenkin laatan vaakasuoraan on aina asetettava myös kolme laattaa vaakasuoraan sen kaveriksi. Tässä voi taas ajatella, että $4 \times n$ alueen ruudut samaistetaan kokonaislukupisteparien (a, b) kanssa, missä $1 \leq a \leq 4$ ja $1 \leq b \leq n$. Nyt on asetettu 1×4-laatta pisteiden $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)$ päälle. Tutkimalla nyt pistettä $(2, 1)$ huomataan, että jos sen peittäisi pystysuorassa oleva laatta, niin kyseinen laatta peittäisi myös ruudun $(1, 1)$, mutta tämä ruutuhan oli jo asetetun vaakasuoran laatan peitossa. Siis pisteen $(2, 1)$ tulee peittämään vaaksuora laatta, joka peittä samalla pisteet $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$. Näin päätellen joudumme laittamaan neljä laattaa vaakasuoraan päällekkäin.
Jos laitamme vaiheessa n pystysuoran laatan on meillä yhä peitettävänä $4 \times n - 1$ kokoinen alue ja jos asetamme alueelle laatan vaakasuoraan jää enää $4 \times n - 4$ kokoinen alue peitettäväksi. Siis päädymme rekursiokaavaan

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-4},$$

kaikille luonnollisille luvuille $n \geq 5$. Alkuehdot selvitimme jo edellä.
Tätä jonoa vastaa polynomiyhtälö

$$x^4 = x^3 + 1.$$

Filosofisluontoinen huomautus: Jos yhdeksi tavaksi täyttää 4×0 alue laskee sen tavan, että aluetta ei voi täyttää, niin saamme alkuarvoksi $a_0 = 1$, jolloin edellä johtamamme rekursiokaava pätee myös arvolla $n = 4$.

5. $\star$ Jatketaan edellisen tehtävän parissa. Määritä polynomiyhtälön ratkaisut (Wolfram alphasta tai laskimesta voi olla hyötyä). Määritä alkuarvojen avulla likiarvot kertoimille, ja määritä luvun a_n lauseke (ilman rekursiota).

Ratkaisu 5. Määritetään siis polynomiyhtälön

$$x^4 = x^3 + 1$$

ratkaisut. Neljännen asteen yhtälöllä on neljä juurta, joista osa voi olla moninkertaisia ja osa kompleksisia. Periaatteessa kyseinen polynomi $p(x) = x^4 - x^3 - 1$ voidaan hajottaa kahteen toisen asteen polynomiin, ja edelleen ensimmäisen termeihin toisen asteen ratkaisukaavalla. Tämä on kuitenkin jokseenkin työlästä eikä ratkaisuista välttämättä tule lainkaan siistejä, joten ratkaistaan yhtälö jollain apuvälineellä ja käytetään likiarvoisia ratkaisuja:

$$\begin{cases} x_1 \approx -0.81917 \\ x_2 \approx 1.3801 \\ x_3 \approx 0.21945 - 0.91447i \\ x_4 \approx 0.21945 + 0.91447i \end{cases}$$

Ratkaisut ovat kaikki erisuuria, joten luvulle a_n saadaan lauseke

$$a_n = b_1 x_1^n + b_2 x_2^n + b_3 x_3^n + b_4 x_4^n,$$

missä $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$. Toisaalta edellisessä tehtävässä määritettiin alkuarvot $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ja $a_4 = 2$, joten saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 1 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 \\ 1 = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 \\ 1 = b_1 x_1^3 + b_2 x_2^3 + b_3 x_3^3 + b_4 x_4^3 \\ 2 = b_1 x_1^4 + b_2 x_2^4 + b_3 x_3^4 + b_4 x_4^4 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän kanssa ekvivalentti yhtälöryhmä, josta tuntemattomat b_1, b_2, b_3, b_4 saadaan ratkaistua, saadaan muuttamalla yhrälöryhmä matriisimuotoon ja viemällä se rivioperaatioilla porrasmuotoon. Tämä on kuitenkin tuskallinen lasku likiarvojen kanssa, joita joutuisi pyöristämään yhä lisää, mikä taas lisää virhettä. Käytetään yhtälöryhmän ratkaisemiseen jotain näppärää apukonstia (Matlab, GeoGebra, jokin ohjelmointikieli, luova improvisaatio).
Ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{cases} b_1 = 0.1306 \approx 0.13 \\ b_2 = 0.5477 \approx 0.55 \\ b_3 = 0.1611 + 0.1533i \\ b_4 = 0.1611 - 0.1533i \end{cases}$$

Muistetaan lisäksi, että kompleksiset ratkaisut voidaan kirjoittaa muodossa $x + yi = re^{i\phi}$, missä $r = x^2 + y^2$ on kompleksiluvun pituus ja kompleksiluvun vaihekulma ϕ toteuttaa yhtälön $\tan\phi = \frac{y}{x}$. Muotoa kutsutaan polaarimuodoksi ja se tehdään helpottaaksemme laskuja, etenkin kompleksilukujen kertolaskua, nimittäin

$$r_1 e^{i\phi_1} \cdot r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

kaikilla kompleksiluvuilla $r_1 e^{i\phi_1}, r_2 e^{i\phi_2} \in \mathbb{C}$. Muutetaan siis luvut x_3, x_4, b_3, b_4 polaarimuotoon ja saadaan

$$x_3 \approx 0.94e^{-i\frac{5\pi}{12}}, \quad x_4 \approx 0.94e^{i\frac{5\pi}{12}}, \quad b_3 \approx 0.22e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad b_4 \approx 0.22e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Lasketaan nyt, että

$$b_3x_3^n + b_4x_4^n = 0.22 \cdot 0.94^n e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{5n\pi}{12})} + 0.22 \cdot 0.94^n e^{i(\frac{5n\pi}{12} - \frac{\pi}{4})}.$$

Merkitään $c_n = \frac{\pi}{4} - \frac{5n\pi}{12}$. Edelleen Eulerin kaavan nojalla

$$e^{ic_n} + e^{-ic_n} = \cos c_n + i \sin c_n + \cos(-c_n) + i \sin(-c_n),$$

mistä kosinin parillisuuden ja sinin parittomuuden nojalla saadaan, että

$$\cos c_n + i \sin c_n + \cos(-c_n) + i \sin(-c_n) = 2 \cos c_n.$$

Kaiken kaikkiaan siis

$$b_3x_3^n + b_4x_4^n = 0.44 \cdot 0.94^n \cdot \cos c_n.$$

Päästiin siis kompleksiluvuista eroon ja saadaan luvulle a_n lauseke

$$a_n \approx 0.13 \cdot (-0.82)^n + 0.55 \cdot (1.38)^n + 0.44 \cdot 0.94^n \cdot \cos c_n.$$

6. Jatketaan vielä yhden tehtävän verran edellisten tehtävien laatoitusten parissa. Anna jokin arvio luvun a_n suuruudesta.

   Ratkaisu 6. Tiedetään, että $a_n \geq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$\begin{aligned} a_n = |a_n| &= |0.13 \cdot (-0.82)^n + 0.55 \cdot (1.38)^n + 0.44 \cdot 0.94^n \cdot \cos c_n| \\ &\leq |0.13 \cdot (-0.82)^n| + |0.55 \cdot (1.38)^n| + |0.44 \cdot 0.94^n \cdot \cos c_n| \\ &\leq 0.13|-0.82|^n + 0.55|1.38|^n + 0.44|0.94|^n|\cos c_n| \\ &\leq 0.13 + 0.55|1.4|^n + 0.44 \\ &\leq 0.57(1 + 1.4^n) \\ &\leq 0.57 \cdot 1.5^n \\ &\leq 0.25 \cdot 2^n = 2^{n-2} \end{aligned}$$

   Arvio $(1 + 1.4^n) \leq 1.5^n$ seuraa väliarvolauseesta ja viimeinen arvio on suora lasku. Toisaalta kolmioepäyhtälöllä toiseen suuntaan saadaan alarajaksi

$$\begin{aligned} a_n = |a_n| &= |0.13 \cdot (-0.82)^n + 0.55 \cdot (1.38)^n + 0.44 \cdot 0.94^n \cdot \cos c_n| \\ &\geq \Big| |0.13 \cdot (-0.82)^n| - |0.55 \cdot (1.38)^n + 0.44 \cdot 0.94^n \cdot \cos c_n| \Big| \\ &\geq \Big| |0.55 \cdot (1.38)^n| - 0.44 \cdot 0.94^n \cdot \cos c_n| \Big| - |0.13 \cdot (-0.82)^n| \\ &= |0.55 \cdot (1.38)^n| - |0.44 \cdot 0.94^n \cdot \cos c_n| - |0.13 \cdot (-0.82)^n| \\ &\geq 0.55 \cdot 1.38^n - 0.57 \geq 0.55 \cdot 1.25^n \geq 1.25^{n-3} \end{aligned}$$

   Saadaan siis, että luvulle a_n pätee

$$1.25^{n-3} \leq a_n \leq 2^{n-2}.$$

   Alaraja ei välttämättä ole kovin konkreettinen, mutta yläraja on varsin selkeä.

7. $\star$ Keksi jokin havainnollistus jonolle $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$.

   Ratkaisu 7. Olkoon a_n maailmanvaltausta suunnittelevan bakteeripopulaation koko päivänä n. Bakteerit lisääntyvät päivittäin jakautumalla kahdeksi. Lisäksi tälle bakteerille on Luoja tai jokin muu taho suonut kaksi erikoista ja maailmanvaltauksen kannalta hyvin suotuisaa ominaisuutta: (1) se oppii päivän elettyään lisääntymään vielä tehokkaammin ja kykeneekin toisena elinpäivänänään jakaantumaan vielä tuplaantumisen lisäksi kerran (tämän tehokkaampaan lisääntymiseen bakteeri ei kuitenkaan kykene), (2) bakteerit ovat kuolemattomia. Tällöin

   $$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}.$$

   (Opiskelijan esittämä laattaesimerkki). Laatoitusten ja rekursion yhteyttä tutkittiin jo edellä ja tähän tehtävään saa näppärän havainnollistuksen miettimällä $1 \times n$ aluetta, jota laatoitetaan 1×2-laatoilla ja kahdella eri värisellä 1×1-laatalla.

8. $\star\star$ Olkoon $S(n, k)$ niiden tapojen lukumäärä, joilla n keskenään erilaista objektia voidaan asettaa k purnukkaan niin, että yksikään purnukka ei jää tyhjäksi. Osoita, että

   $$S(n + 1, k) = S(n, k - 1) + k \cdot S(n, k).$$

   (Vihje: Tarkastele $n + 1$. objektin asettelua. Päätyykö se yksin johonkin purkkiin vai muiden objektien kanssa samaan?)

   Ratkaisu 8. Vertaisarvioitavaan tehtävään tulee ratkaisu erikseen Moodleen.

9. Tarkastellaan vielä edellisen tehtävän purnukoita ja objekteja. Totea, että $S(n, n) = 1$. Laske $S(2, 1)$, $S(3, 2)$ ja $S(n + 1, n)$.

   Ratkaisu 9. Koska yksikään purnukoista ei voi jäädä tyhjäksi, purnukoiden lkm on n ja objektien lkm on n, niin täytyy jokaiseen purnukkaan laittaa tasan yksi objekti. Tämä on siis ainoa tapa miten suoriudumme tehtävästä vaatimukset täyttäen. Siispä $S(n, n) = 1$.
   Jos purnukoita on yksi kappale, voi sinne asettaa n objektia tasan yhdellä tavalla. Erityisesti siis $S(2, 1) = 1$.
   Edellisen tehtävän palautuskaavan nojalla pätee nyt

   $$S(3, 2) = S(2, 1) + 2 \cdot S(2, 2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3.$$

   Tarkastellaan sitten lukua $S(n + 1, n)$, kun $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ on mielivaltainen. Käyttämällä edellisessä tehtävässä laskettua palautuskaavaa saadaan, että

   $$S(n + 1, n) = S(n, n - 1) + n \cdot S(n, n) = S(n, n - 1) + n.$$

   Käyttämällä uudestaan palautuskaavaa lukuun $S(n, n - 1)$ saadaan taas 'astetta' pudotettua yhdellä ja ulos tulee summattavaksi luku $n - 1$. Tämä antaa aihetta väittää, että

   $$S(n + 1, n) = \sum_{i=1}^{n} i.$$

Todistetaan väite induktiolla. Alkuaskel $n = 1$ laskettiin jo edellä.
Oletetaan sitten, että väite pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla $k \leq n$. Tällöin

$$S(k+2, k+1) = S(k+1, k) + k+1 \cdot S(k+1, k+1) = \sum_{i=1}^{k} i + k + 1 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{k+1} i,$$

joten induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla.

10. Tarkastellaan sellaisia luvun n mittaisia jonoja, jotka koostuvat nollista ja ykkösistä ehdolla, että mitkään yli kahta ykköstä tai yli kahta nollaa ei saa olla peräkkäin. Osoita, että erilaisten jonojen määrä on

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$$

ehdoin $p_1 = 2$ ja $p_2 = 4$.

Ratkaisu 10. Huomataan ensin, että n-mittaisia, tehtävän ehdon toteuttavia jonoja, joissa ensimmäinen jäsen on yksi on tasan puolet kaikista sellaisista n-mittaisista jonoista, jotka toteuttavat tehtävän ehdon. (Vastaavasti luvulla nolla alkavia jonoja on puolet). Nimittäin jokaista jonoa, joka alkaa luvulla yksi vastaa luvulla nolla alkava jono, jossa jokainen jonon jäsen on vaihdettu ($1 \to 0$ ja $0 \to 1$).
Jos n-mittainen jono alkaa luvulla yksi, niin jonoja joissa toinen jäsen on nolla on tällöin täsmälleen kaikki luvulla nolla alkavat $n-1$ -mittaiset jonot, eli tasan puolet luvusta p_{n-1}. Toisaalta jos jono alkaa $(1, 1, \ldots)$, niin kolmannen jäsenen täytyy olla nolla, jolloin ehdot täyttäviä jonoja on kaikki luvulla nolla alkavat $n-2$-mittaiset jonot, joita on siis tasan puolet luvusta p_{n-2}. Symmetrian nojalla vastaava päättely pätee luvulla nolla alkaville jonoille, joten saadaan kaikkien jonojen määräksi

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}.$$

Yhden alkion mittaisia jonoja on tasan kaksi $(1), (0)$, joten $p_1 = 2$ ja kahden alkion mittaisia jonoja on neljä $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, joten $p_2 = 4$.

11. Anna lauseke luvulle p_n (eli ratkaise polynomiyhtälö, määritä kertoimet).

Ratkaisu 11. Rekursiivisesti määriteltyä jonoa

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}.$$

vastaa polynomiyhtälö $x^2 = x + 1$. Ratkaisemalla tämä yhtälö saadaan ratkaisuiksi

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ratkaisut ovat nyt erisuuret, joten luvulle p_n saadaan lauseke

$$p_n = b_1 \rho_1^n + b_2 \rho_2^n,$$

joillakin $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Toisaalta tuntemattomat luvut b_1 ja b_2 voidaan ratkaista alkuehdoista. Nimittäin laskemalla luvut p_1 ja p_2 ylläolevalla kaavalla saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 2 = b_1\rho_1^1 + b_2\rho_2^1 \\ 4 = b_1\rho_1^2 + b_2\rho_2^2 \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan, että

$$b_1 = \frac{2 - b_2\rho_2}{\rho_1}$$

ja sijoittamalla tämä alempaan yhälöön ja ratkaisemalla se saadaan, että

$$b_2 = \frac{4 - 2\rho_1}{\rho_2(\rho_2 - \rho_1)}.$$

Sijoitetaan tähän jo ratkaistut lukujen ρ_1 ja ρ_2 arvot jolloin saadaan, että

$$b_2 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Edelleen sijoitetaan luku b_2 yhtälöparin ylempään yhtälöön, jolloin

$$b_1 = \frac{4\sqrt{5}}{5} - 2.$$

Siispä luvulle p_n saadaan lauseke

$$p_n = (1 - \frac{\sqrt{5}}{5})\rho_1^n + (\frac{4\sqrt{5}}{5} - 2)\rho_2^n.$$

12. $\star$ Karl haluaa laskea miten monella tavalla hän voi asettaa k valkoista ja $n-k$ punaista helmeä jonoon. Hän toteaa ensin, että jokaiselle helmelle on kaksi vaihtoehtoa: punainen ja valkoinen. Siispä, yhteensä helminauhoja on 2^n. Kuitenkin punaiset helmet ovat identtisiä keskenään, joten pitää jakaa luvulla $(n-k)!$, ja valkoiset myös identtisiä, joten pitää jakaa luvulla $k!$, eli sillä, miten monella tavalla punaiset tai valkoiset voi olla järjestetty. Lopputulos on siis $\frac{2^n}{k!(n-k)!}$. Seuraavaksi Karl päätti soveltaa kaavaa arvoilla $k = 5$ ja $n = 10$, ja laski, että

$$\frac{2^n}{(n-k)!k!} = \frac{2^{10}}{5!5!} = \frac{1024}{120^2} \approx 0,07.$$

Nyt Karl tuli kuitenkin huolestuneeksi. Luku ei ole kokonaisluku, ja luku lisäksi näyttää häiritsevän pieneltä (hän on varma, että ainakin yksi mahdollinen tapa on). Mikä meni vikaan?

Ratkaisu 12. Alussa Karl laskee kaikkien helminauhojen lukumääräksi 2^n. Tämä on kyllä oikein, mutta luku kertoo vain kaikkien keskenään erilaisten helminauhojen lukumäärän. Siis esimerkiksi helminauhat, joissa kaksi punaista vaihtaa näennäisesti paikkaa keskenään ja muut helmet pysyvät paikalleen lasketaan lukuun 2^n vain kerran. Siis luvulla $(n-k)!$ jakaminen tälläisten identtisten järjestysten poistamiseksi ei ole oikeutettua (vastaavasti luvulla $k!$ jakaminen ei toimi.). Toisaalta myöskään luku 2^n ei ole oikea vastaus, sillä asetimme punaisten ja valkoisten helmien lukumäärälle ehdot.
Tehtävä on oikeasti niinkin yksinkertainen kuin, että lasketaan kuinka monella tavalla k valkoista helmeä voidaan asettaa n:lle paikalle ja sen jälkeen punaiset helmet vain laitetaan tyhjille paikoille. Siis kaikkien helminauhojen lukumäärä on

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Oikeassa kaavassa ei siis muutu muuta kuin yläkerrassa luku 2^n luvuksi $n!$. Merkittävä ero on kuitenkin siinä, että 2^n laskee kaikkien mahdollisten helminauhojen lukumäärän (myös siis sellaisia, joita meillä ei ole mahdollista saada, jos molemman värisiä helmiä pitää nauhassa olla) kun taas $n!$ laskee vain helmien potentiaalisia erilaisia järjestyksiä ottamatta sen kummemmin kantaa minkä värisiä ne ovat.

13. $\star$ Olkoon d_n n alkion joukon epäjärjestysten määrä. Osoita kombinatorisesti (eli käyttämättä monisteen kaavaa), että

$$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}).$$

(Kaavan todistusta saa toki hyödyntää, jos haluaa, mutta tarkoitus ei ole vain iskeä lukuja kaavaan, ja todeta, että kaikki toimii hyvin.)

Ratkaisu 13. Lasketaan joukon $[n+1]$ epäjärjestysten määrä. Jos f on joukon $[n+1]$ epäjärjestys, niin se on bijektiivinen kuvaus joukolta $[n+1]$ itselleen, jolle pätee $f(i) \neq i$ kaikilla $i \in [n+1]$. Erityisesti siis $f(n+1) = i$ jollakin $i \in [n]$. Kiinnitetään $i \in [n]$ ja tutkitaan sellaisia joukon $[n+1]$ epäjärjestyksiä, joilla $f(n+1) = i$.
Jos f on sellainen epäjärjestys, että lisäksi pätee $f(i) = n+1$, niin joukon $[n+1]$ alkiot i ja $n+1$ vaihtavat paikkaa keskenään kuvauksessa f. Tällöin kuvauksen f rajoittuma joukkoon $[n] \setminus \{i\}$ on $n-1$-alkioisen joukon $[n] \setminus \{i\}$ epäjärjestys eli erityisesti tälläisten epäjärjestysten lukumäärä on d_{n-1}.
Toisaalta jos $f(i) \neq n+1$, niin kuvauksen f rajoittuma $g = f \restriction_{[} n]$ on bijektiivinen kuvaus joukolta $[n]$ joukolle $[n+1] \setminus \{i\}$, jolle pätee $g(j) \neq j$ kaikilla $j \in [n] \setminus \{i\}$ ja $g(i) \neq n+1$. Vaikka kyseessä ei nyt olekaan suoraan n-alkioisen joukon epäjärjestys on tilanne sama: tutkimme sellaisten kuvausten lukumäärää, jotka ovat bijektioita kahden n-alkioisen joukon välillä ja toteuttavat sellaisen lisäehdon että jokaisella lähtöjoukon alkiolla on vain $n-1$ maalijoukon vaihtoehtoa, jolle se voidaan kuvata. Siis tälläisten epäjärjestysten lukumäärä on d_n.
Kaiken kaikkiaan sellaisia joukon $[n+1]$ epäjärjestyksiä, joilla $n+1 \mapsto i$ on tasan

$d_n + d_{n-1}$ kappaletta. Koska i voidaan valita joukosta $[n]$ n:llä eri tavalla saadaan haluttu palautuskaava

$$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}).$$

14. Perustele miksi yhtälön

$$x_1 + x_2 + \cdots x_k = n$$

epänegatiivisten kokonaislukuratkaisujen määrä ehdolla $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k$ voidaan esittää rekursiivisesti muodossa

$$p(n,k) = p(n-1,1) + p(n-2,2) + \cdots + p(n-k,k).$$

Ratkaisu 14. Yritetään siis summata k:n verran epänegatiivisia kokonaislukuja, niin että summaksi saadaan luku n. Tutkitaan kuinka paljon erilaisia kokonaislukuratkaisuja tehtävän yhälölle on jakautamalla tapauksiin sen mukaan onko summattavien lukujen ensimmäinen luku nolla vai joku muu luku.
Huomataan, että yhtälön $x_1 + x_2 + \ldots x_k = n$ ratkaisussa voi olla korkeintaan $k-1$ kappaletta nollia. Jos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ on sellainen yhtälömme ratkaisu, että $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1} = 0$, niin $x_k = n$. Tätä ratkaisua vastaa yhtälön $x_1 = n-1$ täsmälleen yksi ratkaisu. Tämä on siis luku $p(n-1,1)$.
Jos taas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ on sellainen yhtälömme ratkaisu, että $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-2} = 0$, niin $0 < x_{k-1} \leq x_k$ ja $x_{k-1} + x_k = n$. Vähentämällä tämän ratkaisun jokaisesta positiivisesta luvusta luku yksi saadaan yhtälön $y_1 + y_2 = n-2$ epänegatiivinen kokonaislukuratkaisu, nimittäin tällöin $0 \leq x_{k-1}-1 \leq x_k-1$ ja $x_{k-1}-1+x_k-1 = n-2$. Tälläisten ratkaisujen lukumäärä on siis tasan $p(n-2,2)$. Seuraavaksi huomataan, että sellaisia ratkaisuja, joissa $k-3$ ensimmäistä summattavaa on nollia vastaa yhtälön $y_1 + y_2 + y_3 = n-3$ ratkaisua eli tälläisten ratkaisujen lukumäärä on $p(n-3,3)$. Käydään läpi vastaavasti kaikki ratkaisut, joissa esiintyy luku nolla. Viimeiseksi siis huomataan, että sellaisten ratkaisujen lukumäärä, jossa on summattavana täsmälleen yksi nolla on $p(n-(k-1), k-1)$.
Enää on siis käymättä läpi sellaiset kokonaislukuratkaisut, joissa ei yksikään summattava ole nolla. Jos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ on sellainen yhtälömme ratkaisu, että $x_1 > 0$, niin vähentämällä tälläisen ratkaisun jokaisesta luvusta luku yksi saadaan yhtälön $y_1 + \ldots y_k = n-k$ epänegatiivinen kokonaislukuratkaisu. Tälläisten ratkaisujen lukumäärä on siis $p(n-k,k)$. Yhdistämällä nyt tapaukset saadaan haluttu palautuskaava

$$p(n,k) = p(n-1,1) + p(n-2,2) + \cdots + p(n-k,k).$$

15. † 9×9-ruudukon joka ruudussa istuu koppakuoriainen. Signaalin saatuaan jokainen koppakuoriainen ryömii diagonaalisesti naapuriruutuun. Määritä pienin mahdollinen määrä tyhjiä ruutuja.

16. † Tason pisteet on väritetty punaiseksi, siniseksi ja vihreäksi. Osoita, että on olemassa samanväriset pisteet, joiden välinen etäisyys on 1.

17. †† Tason pisteet on väritetty punaiseksi, siniseksi ja vihreäksi. Osoita, että jotkin kolme samanväristä pistettä muodostavat suorakulmaisen kolmion kulmat.