Mitta ja integraali, kesä 2014
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

inf ja sup; lim inf ja lim sup

Käsitteet lim inf ja lim sup pudottavat monet pahasti kärryiltä, vaikka käsitteet eivät sinällään ole erityisen monimutkaiset. Niiden selkeä ymmärtäminen vaatii kuitenkin paljon: jos yksikin kohdista

1) inf ja sup
2) jono ja osajono
3) jonon suppeneminen ja raja-arvo
4) vähenevä ja kasvava jono

tai niihin liittyvistä perustuloksista tuntuu epäselvältä, myös käsitteet lim inf ja lim sup tuntunevat epäselviltä. Kerrataan aluksi pikaisesti edellisiin kohtiin 1) ja 2) liittyviä asioita.

inf ja sup joukossa $\dot{\mathbb{R}}$

Infimumille (suurimmalle alarajalle) ja supremumille (pienimmälle ylärajalle) on voimassa seuraavat ominaisuudet.

a) Jos $\emptyset \neq A \subseteq B$, niin
$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$
b) Jos $a \leq \alpha$ kaikilla $a \in A$, niin $\sup A \leq \alpha$.
c) Jos $a \geq \beta$ kaikilla $a \in A$, niin $\inf A \geq \beta$.
d) Jos $a \in A$, niin $\inf A \leq a \leq \sup A$.

jono ja osajono

Jonon $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ (eli funktion $a\colon \mathbb{N} \to \dot{\mathbb{R}}, a(k) = a_k$) osajono on mikä tahansa jono $(b_k)_{k=1}^{\infty}$, jolle pätee $b_k = a_{m_k}$ jollakin $m_k \geq k$ ja $m_1 > m_2 > m_3 > \ldots$. Esimerkiksi jonot
$$2, 4, 6, \ldots \qquad \text{ja} \qquad 1, 25, 500, 7500, \ldots$$
ovat jonon $1, 2, 3, \ldots$ osajonoja, mutta jono
$$3, 1, 2, 3, 4, \ldots$$
ei ole, sillä alkiot 3 ja 1 esiintyvät jonossa väärässä järjestyksessä ja alkio 3 toistuu kahdesti.

Monissa käytännön ongelmissa on olennaista huomata, että jos jono (b_k) on jonon (a_k) osajono, niin jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$\{b_k \colon k \geq n\} \subseteq \{a_k \colon k \geq n\}.$$

Yhdistämällä tämä havainto inf ja sup -kohdan ominaisuuteen a) huomaamme, että tässä tapauksessa jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$\inf\{a_k \colon k \geq n\} \leq \inf\{b_k \colon k \geq n\} \leq \sup\{b_k \colon k \geq n\} \leq \sup\{a_k \colon k \geq n\},$$

eli toisilla merkinnöillä kirjoitettuna

$$\inf_{k \geq n} a_k \leq \inf_{k \geq n} b_k \leq \sup_{k \geq n} b_k \leq \sup_{k \geq n} a_k. \tag{1}$$

<u>lim inf ja lim sup</u>

Olkoon $a_1, a_2, \ldots$ jono avaruudessa $\dot{\mathbb{R}}$. Tällöin

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \supseteq \{a_2, a_3, a_4, \ldots\} \supseteq \{a_3, a_4, a_5, \ldots\} \supseteq \ldots,$$

joten inf ja sup -kohdan ominaisuuden a) nojalla huomaamme, että

$$\sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \geq \sup\{a_2, a_3, a_4, \ldots\} \geq \sup\{a_3, a_4, a_5, \ldots\} \geq \ldots$$

ja

$$\inf\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \leq \inf\{a_2, a_3, a_4, \ldots\} \leq \inf\{a_3, a_4, a_5, \ldots\} \leq \ldots.$$

Lyhyempiä merkintöjä käyttäen:

$$\sup_{n \geq 1} a_n \geq \sup_{n \geq 2} a_n \geq \sup_{n \geq 3} a_n \geq \ldots$$

ja

$$\inf_{n \geq 1} a_n \leq \inf_{n \geq 2} a_n \leq \inf_{n \geq 3} a_n \leq \ldots.$$

Siis jono $(\sup_{n \geq k} a_n)_{k=1}^{\infty}$ on laskeva jono ja jono $(\inf_{n \geq k} a_n)_{k=1}^{\infty}$ on nouseva jono, joten kumpikin noista jonoista suppenee kohti jotakin joukon $\dot{\mathbb{R}}$ pistettä. Merkitsemme

$$\limsup_{k \to \infty} a_k := \lim_{k \to \infty} \sup_{n \geq k} a_n \qquad \text{ja} \qquad \liminf_{k \to \infty} a_k := \lim_{k \to \infty} \inf_{n \geq k} a_n.$$

Esimerkki 2. Tarkastellaan lukujonoa (a_k), $a_k = (-1)^k$. Nyt kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$\{a_k \colon k \geq n\} = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \{-1, 1\},$$

joten

$$\liminf_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \inf_{n \geq k} a_n = \lim_{k \to \infty} \inf\{-1, 1\} = -1$$

ja

$$\limsup_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \sup_{n \geq k} a_n = \lim_{k \to \infty} \sup\{-1, 1\} = 1.$$

Esimerkki 3. Tarkastellaan lukujonoa $(a_k)_{k=5}^{\infty}$,

$$a_k = (-1)^k \frac{k^2+5k}{k^2-4k},$$

ja määritetään tarkasti $\liminf_{k\to\infty} a_k$ ja $\limsup_{k\to\infty} a_k$.

Ratkaisu. Huomataan, että kaikilla $k \geq 5$ on voimassa

$$(-1)^k \frac{k^2+5k}{k^2-4k} = (-1)^k \frac{k+5}{k-4} = (-1)^k \left(1 + \frac{9}{k-4}\right).$$

Erityisesti kaikilla $k \geq 5$ ja $n \geq k$ on voimassa

$$-1 - \frac{9}{k-4} \leq a_n \leq 1 + \frac{9}{k-4}.$$

Siten inf ja sup -kohdan ominaisuuksien c) ja d) nojalla jokaisella $k \geq 5$ on voimassa

$$-1 - \frac{9}{k-4} \overset{\text{c)}}{\leq} \inf_{n\geq k} a_n \overset{(1)}{\leq} \inf_{n\geq k} a_{2n+1} \overset{\text{d)}}{\leq} a_{2k+1} = -1 - \frac{9}{2k-3}.$$

Antamalla $k \to \infty$ huomaamme, että

$$-1 \leq \liminf_{k\to\infty} a_k \leq -1,$$

joten $\liminf_{k\to\infty} a_k = -1$.

Vastaavasti

$$1 + \frac{9}{k-4} \geq \sup_{n\geq k} a_n \geq \sup_{n\geq k} a_{2n} \geq a_{2k} = 1 + \frac{9}{2k-4},$$

joten $\limsup_{k\to\infty} a_k = 1$. $\square$

Huomautus. Usein monia edellisen esimerkin kohtia oiotaan “selvinä” tai “triviaaleina” askelina, mutta kaikille nämä askeleet eivät toki ole selviä tai triviaaleja. Suosittelen kirjoittamaan jokaisen askeleen yksityiskohtaisesti niin kauan, kun ne tuntuvat epäselviltä.