Mitta ja integraali, kesä 2014
Olli Tapiola
`olli.tapiola@helsinki.fi`

Esimerkkejä Carathéodoryn ehdon käytöstä ja soveltamisesta

Carathéodoryn ehto: joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos jokaisella joukolla $A \subset \mathbb{R}^n$ on voimassa

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Carathéodoryn ehdon soveltaminen on yksi kurssin ydinasioista! Soveltamisessa olennaista on huomata, että jos E on mitallinen, ehto on tosiaan voimassa aivan jokaisella joukolla $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Joukkoa A nimitetään tällaisessa yhteydessä testijoukoksi, ja sopivalla testijoukon valinnalla saadaan yleensä osoitettua paljon. Alla on ehdon käytöstä ja soveltamisesta kaksi esimerkkiä, jotka esitettiin pikaisesti taululla kertausluennolla perjantaina 23.5.2014.

1. Osoita, että joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos ja vain jos

$$m^*(S \cup U) = m^*(S) + m^*(U)$$

kaikilla $S \subseteq E$ ja $U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus E$.

Ratkaisu. Oletetaan ensin, että joukko E on mitallinen. Olkoon $S \subseteq E$ ja $U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus E$. Käyttämällä joukkoa $S \cup U$ testijoukkona Carathéodoryn ehdossa saamme

$$\begin{aligned} m^*(S \cup U) &= m^*((S \cup U) \cap E) + m^*((S \cup U) \setminus E) \\ &= m^*(S) + m^*(U), \end{aligned}$$

sillä $(S \cup U) \cap E = S$ ja $(S \cup U) \setminus E = U$.

Oletetaan sitten, että tehtävänannon ehto pätee. Olkoon nyt $A \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltainen joukko. Huomataan, että joukko A voidaan kirjoittaa muodossa $A = (A \cap E) \cup (A \setminus E)$, jolloin $S := A \cap E \subseteq E$ ja $U := A \setminus E \subseteq \mathbb{R}^n \setminus E$. Siten

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*((A \cap E) \cup (A \setminus E)) \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E), \end{aligned}$$

joten Carathéodoryn ehdon nojalla joukko E on mitallinen. $\square$

2. Osoita: Joukko $E \subseteq \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos ja vain jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellaiset mitalliset joukot A ja B, että $A \subseteq E \subseteq B$ ja $m(B \setminus A) < \varepsilon$.

Ratkaisu. Oletetaan, että joukko $E \subseteq \mathbb{R}^n$ on mitallinen. Tällöin $E \subseteq E \subseteq E$ ja $m(E \setminus E) = m(\emptyset) = 0 < \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Siis voimme valita $A = B = E$.

Oletetaan sitten väitteen toinen puoli ja osoitetaan, että Carathéodoryn ehto on tällöin voimassa joukolle E. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja A ja B sellaiset mitalliset joukot, joille $A \subseteq E \subseteq B$ ja $m(B \setminus A) < \varepsilon$. Nyt jokaiselle joukolle C on voimassa

$$\begin{aligned} C \cap E &\subseteq C \cap B \\ &= (C \cap (B \setminus A)) \cup (C \cap A), \end{aligned}$$

joten monotonisuuden (m) ja subadditiivisuuden (s) nojalla on voimassa

$$\begin{aligned} m^*(C \cap E) &\overset{\text{(m)}}{\leq} m^*((C \cap (B \setminus A)) \cup (C \cap A)) \\ &\overset{\text{(s)}}{\leq} m^*(C \cap (B \setminus A)) + m^*(C \cap A) \\ &\overset{\text{(m)}}{\leq} m^*(B \setminus A) + m^*(C \cap A) \\ &\leq m^*(C \cap A) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{1}$$

Toisaalta koska $A \subseteq E$, niin $C \setminus E \subseteq C \setminus A$, niin monotonisuuden nojalla on voimassa

$$m^*(C \setminus E) \leq m^*(C \setminus A). \tag{2}$$

Yhdistämällä edelliset havainnot huomaamme, että

$$\begin{aligned} m^*(C \cap E) + m^*(C \setminus E) &\overset{(1)}{\leq} m^*(C \cap A) + \varepsilon + m^*(C \setminus E) \\ &\overset{(2)}{\leq} m^*(C \cap A) + m^*(C \setminus A) + \varepsilon \\ &\overset{\text{Carathéodory}}{=} m^*(C) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Luvun $\varepsilon > 0$ mielivaltaisuuden nojalla on siis voimassa $m^*(C) \geq m^*(C \cap E) + m^*(C \setminus E)$ kaikilla joukoilla $C \subseteq \mathbb{R}^n$, joten erityisesti Carathéodoryn ehto on voimassa joukolle E ja joukko E on siten mitallinen. $\square$