Mitta ja integraali
Kesä 2014
Kertaustehtäviä

---

1. Osoita, että joukot $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$ ovat 0-mittaisia.

2. Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \subseteq B$. Osoita, että $m_n^*(A) \leq m_n^*(B)$.

3. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko. Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen avoin joukko $B_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^n$, jolla pätee $A \subseteq B_\varepsilon$ ja
$$m_n^*(B_\varepsilon) \leq m_n^*(A) + \varepsilon.$$

4. Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^n$ sellainen joukko, että $m_n^*(E) = 0$. Osoita, että joukko E on mitallinen.

5. Olkoot A ja B sellaisia Lebesgue-mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja, että $m(A \cap B) < +\infty$. Osoita, että
$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

6. Perustele, miksi joukko A on mitallinen ja määritä $m(A)$, kun
   a) $A = [0, 2] \times [5, 10] \subseteq \mathbb{R}^2$,
   b) $A = \mathbb{R}^3$,
   c) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$.

7. Osoita, että jokainen jatkuva kuvaus $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

8. Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $\chi_E \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ joukon E karakteristinen funktio:
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in E \\ 0, & \text{jos } x \notin E \end{cases}.$$
   Osoita, että funktio χ_E on mitallinen, jos ja vain jos joukko E on mitallinen.

9. Osoita, että jokainen monotoninen funktio $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

10. Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$ mitallinen kuvaus, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Osoita, että tällöin myös funktio $f^+\colon A \to \mathbb{R}$, $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$, on mitallinen.

11. Olkoot $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ kuvauksia, f mitallinen ja $f = g$ melkein kaikkialla. Osoita, että funktio g on mitallinen.

12. Onko kuvaus $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & \text{jos } x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & \text{jos } x \in \mathbb{Q} \end{cases},$$

mitallinen?

13. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Osoita, että funktio f' on mitallinen.

14. a) Määrittele käsitteet yksinkertainen funktio, yksinkertaisen funktion integraali ja positiivisen mitallisen funktion Lebesgue-integraali yli mitallisen joukon E.
    b) Mitkä seuraavista funktioista ovat yksinkertaisia?
       i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$
       ii) $\chi_{\mathbb{Q}} + 3\chi_{\{\pi\}} + 20\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$
       iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[-n,n]}$

15. Anna esimerkki mitallisesta funktiosta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka ei ole Riemann-integroituva mutta jolle pätee $\int f\, dm = 1$.

16. Muotoile Fatoun lemma ja todista se esimerkiksi Monotonisen konvergenssin lauseen avulla.

17. Anna esimerkki jonosta mitallisia funktioita $f_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee: $f(x) := \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ on olemassa kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_j\, dm \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{j\to\infty} f_j\, dm.$$

18. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja olkoon $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ integroituva funktio. Osoita, että kaikilla $c > 0$ pätee

$$m(\{x \in A\colon |f(x)| > c\}) \leq \frac{1}{c} \int_A |f|.$$

19. Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}}\, dx.$$

20. Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k)\, dx.$$

21. Osoita, että toinen seuraavista väitteistä on oikein ja toinen väärin:

   a) Jos funktio f on integroituva joukossa $A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, niin myös funktio $|f|^{1/2}$ on integroituva joukossa A.

   b) Jos funktio f on integroituva joukossa $B \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$, niin myös funktio $|f|^{1/2}$ on integroituva joukossa B.

22. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen. Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen avoin joukko $G \subset \mathbb{R}^n$, että $A \subset G$ ja $m(G \setminus A) < \varepsilon$.

23. Osoita, että joukko $E \subseteq \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos ja vain jos

$$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \setminus E)$$

jokaisella avoimella n-välillä I.

24. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset [0,1]$ sellaisia mitallisia joukkoja, että jokainen piste $x \in [0,1]$ kuuluu ainakin kolmeen eri joukkoon A_k. Osoita, että $m(A_k) \geq 3/n$ jollakin k.

25. Olkoon $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen kuvaus, jolle pätee $f \geq 0$ ja $\int_E f < +\infty$. Osoita, että $f(x) < +\infty$ melkein kaikilla $x \in E$.