

Mitta ja integraali

Kesä 2014

Harjoitustehtävät 5¹ (2 sivua) (viimeiset harjoitukset)

Nämä tehtävät käsittelevät kurssimateriaalin kappaleita 2 ja 3. Niiden ratkaisemiseen saa apua luentojen jälkeen laskupajasta. Tehtävät käsitellään laskuharjoitustilaisuudessa **perjantaina 13.6.2014 klo 11-13**.

1. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja olkoon $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sellainen kuvaus, että joukko $\{x \in A: f(x) < q\}$ on mitallinen jokaisella $q \in \mathbb{Q}$.

- Osoita, että A on mitallinen joukko.
- Osoita, että f on mitallinen kuvaus.

2. Määritä $\limsup_{j \rightarrow \infty} a_j$ ja $\liminf_{j \rightarrow \infty} a_j$, kun

- $a_j = \frac{1}{j} + \sin\left(\frac{j\pi}{4}\right)$,
- $a_j = (-1)^j \frac{j^3 + j^2}{2j^3 - j}$.

3. Olkoot joukot $E_j \subseteq \mathbb{R}^n$ erillisiä ja mitallisia, $j \in \mathbb{N}$, ja olkoon funktio $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ mitallinen. Osoita, että

$$\int_{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j} f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f.$$

4. Laske raja-arvo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_1^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx.$$

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} dx.$$

[Vihje: muista, että $\sin(x)/x \rightarrow 1$, kun $x \rightarrow 0$.]

¹Tehtävässä 1 maalijoukko korjattiin \mathbb{R} :ksi 9.6.2014.

6. Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integroitava. Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen mitallinen joukko $A_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^n$, että $m(A_\varepsilon) < \infty$ ja

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon} |f| dm < \varepsilon.$$

7. Olkoon $(f_j)_{j=1}^\infty$ sellainen jono mitallisia kuvauksia $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, että summafunktio $\sum_{j=1}^\infty |f_j|$ on integroitava. Osoita, että

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j dm = 0.$$

8. Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-nx^2} dx.$$