Mitta ja integraali
Kesä 2014
Harjoitustehtävät 4 (2 sivua)

Nämä tehtävät käsittelevät kurssimateriaalin kappaleita 2 ja 3. Niiden ratkaisemiseen saa apua luentojen jälkeen laskupajasta. Tehtävät käsitellään laskuharjoitustilaisuudessa **perjantaina 6.6.2014 klo 11-13**.

---

1. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Määritellään funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } \cos x \in \mathbb{Z} \\ \sin x, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että funktio g on mitallinen.

2. a) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_j\colon A \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, jono mitallisia funktioita. Osoita, että joukot

$$A_j = \{x \in A : f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$$

ovat mitallisia.

b) Osoita a)-kohdan avulla, että joukko

$$\{x \in A\colon \text{ jono } (f_j(x))_{j=1}^{\infty} \text{ on aidosti kasvava}\}$$

on mitallinen.

3. a) Olkoot $A_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in J$, erillisiä, mitallisia joukkoja, joille $m_n(A_j) > 0$ kaikilla $j \in J$. Osoita, että indeksijoukko J on numeroituva.

b) Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ mitallinen. Osoita a)-kohdan avulla, että

$$\{x \in \mathbb{R}^n\colon m(f^{-1}\{x\}) > 0\}$$

on numeroituva joukko.

4. Anna esimerkki funktiojonosta $f_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, jolle $\lim_{i\to\infty} f_i(x) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$ mutta Riemannin integraalien $\int_0^1 f_i(x)\,dx$ jonolla ei ole raja-arvoa.

5. Etsi funktion $\sqrt{2}\chi_{[0,\pi]} + 5\chi_{[\pi/2,6]} + 3\chi_{\mathbb{Q}}$ normaaliesitys ja laske sen integraali.

6. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja. Oletetaan, että jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ piste kuuluu korkeintaan p:hen joukkoon A_j. Osoita käyttämällä yksinkertaisia funktioita, että

$$p\, m\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \geq \sum_{j=1}^{k} m(A_i).$$

7. Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x + \sin^k x}} dx.$$

8. ("Laskeva MKL (monotonisen konvergenssin lause)")

   Olkoot $f_i\colon E \to \mathbb{R}$ mitallisia funktioita, joille $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$. Osoita: Jos $\int_E f_1 < \infty$, niin

$$\int_E \lim_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty} \int_E f_i.$$