Mitta ja integraali
Kesä 2014
Harjoitustehtävät 3[1] (2 sivua)

Nämä tehtävät käsittelevät kurssimateriaalin kappaleita 1 ja 2. Niiden ratkaisemiseen saa apua luentojen jälkeen laskupajasta. Tehtävät käsitellään laskuharjoitustilaisuudessa **perjantaina 30.5.2014 klo 11-13**.

---

1. Osoita, että seuraavat joukot ovat mitallisia.
   a) $\mathbb{Z}^c \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$
   b) $B \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$
   c) $C \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon xy < x^4 z + 8y \leq 15\}$
   d) ∂D, kun D on mikä tahansa avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko.

2. Olkoon $A \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [0,1], y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\}$. Osoita, että joukko A on mitallinen ja laske $m_2(A)$.

3. Määritä:
   a) $m_n(\mathbb{R}^n)$
   b) $m_2(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (0,1), 0 \leq y \leq x\})$

4. Osoita, että joukko $E \subseteq \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos ja vain jos
$$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \setminus E)$$
   jokaisella avoimella n-välillä I.

5. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $f \colon A \to \mathbb{R}$ kuvaus. Merkitään
$$A_r \coloneqq \{x \in A \colon f(x) > r\}$$
   jokaisella $r \in \mathbb{R}$. Osoita: jos $m_n^*(A_0) > 0$, niin on olemassa sellainen $r > 0$, että $m_n^*(A_r) > 0$.

---

[1] Tehtävää 7 tarkennettu hieman 26.5.2014.

6. a) Tutustu Lauseisiin 2.9 ja 2.10 ja todista niiden avulla: jos $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ ovat mitallisia kuvauksia, myös tulo $fg\colon A \to \mathbb{R}$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$ on mitallinen kuvaus.
   b) Olkoot $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia kuvauksia. Osoita edelliskohdan avulla, että myös tulo $fg\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ on mitallinen kuvaus.

7. Tutustu Lauseeseen 2.12 ja osoita sen avulla, että jokainen monotoninen funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

8. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mikä tahansa osajoukko ja olkoon $\mathcal{V} := \{V_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ sen avoin peite[2]. Osoita, että on olemassa numeroituva osajoukko $\mathcal{V}' := \{V_{\alpha_j}\colon j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{V}$, jolle pätee

$$A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} V_{\alpha_j}.$$

[2]Joukot V_α ovat siis avoimia ja on voimassa $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha$.