Mitta ja integraali
Kesä 2014
Harjoitustehtävät 2 (2 sivua)

Nämä tehtävät käsittelevät kurssimateriaalin kappaletta 1. Niiden ratkaisemiseen saa apua luentojen jälkeen laskupajasta. Tehtävät käsitellään laskuharjoitustilaisuudessa **perjantaina 23.5.2014 klo 11-13**.

---

1. a) Olkoon $a \in \mathbb{R}^n$. Osoita suoraan Lebesguen ulkomitan määritelmän avulla, että joukko $\{a\}$ on 0-mittainen.
   b) Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ numeroituva joukko. Osoita a)-kohdan ja subadditiivisuuden avulla, että joukko A on 0-mittainen.

2. a) Olkoon $a \in \mathbb{R}$ kiinnitetty piste. Osoita, että joukko $\{a\} \times \mathbb{R} = \{(a, x) \colon x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ on 0-mittainen.
   b) Osoita a)-kohdan avulla, että joukko $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ on 0-mittainen.

3. Osoita, että Lebesguen ulkomitta on *translaatioinvariantti*: kaikille joukoille $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja kaikille pisteille $x \in \mathbb{R}^n$ on voimassa

$$m_n^*(A + x) = m_n^*(A),$$

kun $A + x \coloneqq \{a + x \colon a \in A\}$.

4. Osoita, että Lebesguen ulkomitalle on voimassa seuraava ominaisuus: kaikille joukoilla $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja kaikille luvuille $t > 0$ on voimassa

$$m_n^*(tA) = t^n m_n^*(A),$$

kun $tA \coloneqq \{ta \colon a \in A\}$.

5. Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallisia joukkoja, joille pätee $A \subseteq B$ ja $m(A) < \infty$. Osoita Carathéodoryn ehdon avulla, että

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

6. Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko. Osoita Carathéodoryn ehdon avulla, että

$$m^*(A \cup E) + m^*(A \cap E) = m^*(A) + m^*(E).$$

7. Sanomme, että kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *Lipschitz*, jos on olemassa sellainen vakio $L > 0$, että $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos joukko $A \subseteq \mathbb{R}$ on 0-mittainen ja kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Lipszhitz, niin myös joukko fA on 0-mittainen.

8. a) Osoita, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukkoperhe

$$\mathcal{B} = \{B(x, r)\colon x \in \mathbb{Q}^n, r > 0, r \in \mathbb{Q}\}$$

on numeroituva.

b) Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Osoita a)-kohdan avulla, että V voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä kuulia:

$$V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i,$$

missä $B_i \in \mathcal{B}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$.