Mitta ja integraali
Kesä 2014
Harjoitustehtävät 1 (2 sivua)[1]

Nämä tehtävät käsittelevät kurssin esitietoja ja kurssimateriaalin kappaletta 0. Niiden ratkaisemiseen saa apua luentojen jälkeen laskupajasta. Tehtävät käsitellään laskuharjoitustilaisuudessa **perjantaina 16.5.2014 klo 11-13**.

---

1. Määritä seuraavat joukot.

   a) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right]$
   b) $\bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}} [m, m+1) \times [n, n+1)$
   c) $\bigcap_{m,n\in\mathbb{Z}} [m, m+1) \times [n, n+1)$
   d) $\dot{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(B\left(0, 2^k\right) \setminus B(0, 2^{k-1})\right)$

2. Määritä seuraavien joukkojen supremumit ja infimumit (joukossa $\dot{\mathbb{R}}$).

   a) $A \coloneqq \{1/n \colon n \in \mathbb{N}\}$
   b) $B \coloneqq \{\sum_{n=1}^{k} 1/n \colon k \in \mathbb{N}\}$
   c) $C \coloneqq \{\sum_{n=k}^{\infty} 1/n \colon k \in \mathbb{N}\}$
   d) $D \coloneqq \{\sum_{n=k}^{\infty} 1/2^n \colon k \in \mathbb{N}\}$
   e) $E \coloneqq [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$

3. Olkoon $\varepsilon > 0$. Osoita, että joukko $A \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (0, 1), 0 < y < x\}$ voidaan peittää suljetuilla suorakaiteilla, joiden yhteenlaskettu pinta-ala on korkeintaan $1/2 + \varepsilon$.

4. Olkoot $A, B \subseteq \dot{\mathbb{R}}$ epätyhjiä joukkoja, joille pätee $A \subseteq B$. Osoita, että tällöin pätee

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

   Päteekö tulos, jos $A = \emptyset$? Entä jos $B = \emptyset$?

[1] Pari ladontavirhettä ja tehtävän 2 d) indeksivirhe korjattu 11.5.2014. Tehtävää 3 hiottu hieman 12.5.2014.

5. Tarkastellaan jonoja (x_n) ja (y_n), jotka on määritelty ehdoilla

$$x_n \coloneqq (-1)^n \qquad y_n \coloneqq 1/n.$$

Määritellään näiden jonojen avulla vielä jonot (a_n), (b_n), (c_n) ja (d_n):

$$\begin{aligned} a_n &\coloneqq \sup\{x_k \colon k \geq n\}, \\ b_n &\coloneqq \inf\{x_k \colon k \geq n\}, \\ c_n &\coloneqq \sup\{y_k \colon k \geq n\}, \\ d_n &\coloneqq \inf\{y_k \colon k \geq n\}. \end{aligned}$$

a) Suppenevatko jonot (x_n) ja (y_n)?

b) Osoita, että jonot (a_n), (b_n), (c_n) ja (d_n) suppenevat, ja määritä niiden raja-arvot.

6. Olkoon I indeksijoukko ja $a_i > 0$ jokaisella $i \in I$. Oletetaan lisäksi, että

$$\sum_{i \in I} a_i \coloneqq \sup_{J \subseteq I \text{ äärellinen}} \sum_{j \in J} a_j < \infty.$$

Osoita, että joukko I on numeroituva.

7. Tutki, ovatko seuraavat joukot numeroituvia vai ylinumeroituvia.

a) $A \coloneqq \{a/b \colon a, b \in \mathbb{Z}, |a| < 700, b \neq 0, |b| < 50000\}$

b) $B \coloneqq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

c) $C \coloneqq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (vihje: muodosta bijektio joukkojen B ja C välille)

8. Osoita, että joukko $A \setminus B$ on avoin euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^4$, kun

$$\begin{aligned} A &\coloneqq \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \colon a^2 b + c - \sqrt[3]{d} < 72ad\}, \\ B &\coloneqq [5, 10]^4 \cup [100, 101]^4. \end{aligned}$$