Mitta ja integraali, kesä 2014
19.6.2014 järjestetyn kurssikokeen ratkaisut ja arvosteluperusteet
Olli Tapiola (`olli.tapiola@helsinki.fi`)

---

1. a) Määrittele käsite Lebesguen ulkomitta. *2p*

   b) Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa? Perustele vastauksesi!

   i) Jos $m^*(A) > 0$, niin A sisältää epätyhjän avoimen joukon. *2p*

   ii) Jos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on rajoitettu, niin $m^*(A) < +\infty$. *2p*

Ratkaisu. a) Määritellään ensin joitakin apukäsitteitä. Joukko I on avoin n-väli, jos se on muotoa

$$I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n),$$

ja joukon I geometrinen mitta on tässä tapauksessa

$$\ell(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Kokoelma $\mathcal{F}$ on joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesguen peite, jos se on numeroituva kokoelma avoimia n-välejä, jotka peittävät joukon A. Tällöin voimme liittää jokaiseen Lebesguen peitteeseen $\mathcal{F} \coloneqq \{I_1, I_2, \ldots\}$ suureen $S(\mathcal{F})$,

$$S(\mathcal{F}) \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i).$$

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ Lebesguen ulkomitta on kuvaus $m_n^* \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$, joka määritellään kaavalla

$$m_n^*(A) = \inf\{S(\mathcal{F}) \colon \mathcal{F} \text{ on joukon } A \text{ Lebesguen peite}\}.$$

b) i) Väite **ei pidä** paikkaansa. Esimerkiksi $m^*(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = +\infty$, mutta joukko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ei sisällä yhtään avointa väliä.

ii) Väite **pitää** paikkansa. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ rajoitettu. Siten on olemassa sellainen $M > 0$, että $A \subseteq B(0, M)$. Tällöin $A \subseteq B(0, M) \subseteq [-M, M]^n$, joten ulkomitan monotonisuuden nojalla

$$m^*(A) \leq m^*([-M, M]^n) = (2M)^n < +\infty.$$

□

Arvostelusta

- jokainen kohta +2p
- Kohdassa a) sakotettiin pisteitä, jos käsitteitä oli määritelty puutteellisesti, epätarkasti tai väärin. Ulkomitan määritelmää ei kuitenkaan tarvinnut antaa kuvauksena m_n^*, kuten ratkaisuna (riitti määritellä tarkasti $m_n^*(A)$).
- Kohdassa b) pisteitä menetti virheellisistä päättelyistä tai puutteellisista ratkaisuista (esimerkiksi jos kohta ii) oli osoitettu vain tapauksessa $n = 2$).

2. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja olkoot kuvaukset $f_j\colon A \to \mathbb{R}$ mitallisia, $j \in \mathbb{N}$.

   a) Osoita, että joukot $\{x \in A\colon f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$ ovat mitallisia.

   b) Osoita, että joukko $\{x \in A\colon$ jono $(f_j(x))_{j=1}^{\infty}$ on aidosti kasvava$\}$ on mitallinen.

Ratkaisu. (a) Merkitään $A_j := \{x \in A\colon f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$.
Koska f_j on mitallinen kuvaus jokaisella $j \in \mathbb{N}$, niin kuvaus $g_j := f_{j+1} - f_j$ on kahden mitallisen (reaaliarvoisen) kuvauksen erotuksena mitallinen jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Siten koska

$$A_j = \{x \in A\colon f_{j+1}(x) > f_j(x)\} = \{x \in A\colon g_j(x) > 0\} = g_j^{-1}(0, \infty)$$

ja väli $(0, \infty)$ on avoin joukko, niin joukko A_j on mitallisen kuvauksen määritelmän (tai Lauseen 2.12) nojalla mitallinen joukko.

(b) Huomataan, että

$$\{x \in A\colon \text{ jono } (f_k(x))_{k=1}^{\infty} \text{ on aidosti kasvava}\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j,$$

jossa $A_j = \{x \in A\colon f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$. Siten edelliskohdan nojalla annettu joukko on mitallisten joukkojen numeroituvana leikkauksena mitallinen.

$\square$

Arvostelusta

- kumpikin kohta +3p
- Jos kohdassa (a) käytti Lausetta 2.12, viite kyseiseen lauseeseen tai sen lyhyt muotoilu (tai vastaava perustelu) vaadittiin täysiin pisteisiin.
- Kohdassa (b) menetti 1.5 pistettä, jos annetun joukon oli esittänyt heikosti perustellen yhdisteenä (a)-kohdan joukoista.

3. a) Muotoile Dominoidun konvergenssin lause oletuksineen (ei tarvitse todistaa). *2p*

b) Määritä:

$$\lim_{k\to\infty}\int_1^k x^{-2}e^{x/k}\cos(x/k)\,dx.$$

Muista perustelut! *4p*

Ratkaisu. a) Olkoot $f_j\colon E\to\dot{\mathbb{R}}$ mitallisia kuvauksia, joille raja-arvo

$$f(x) := \lim_{j\to\infty} f_j(x)$$

on olemassa melkein kaikilla $x\in E$. Tällöin jos on olemassa sellainen integroituva funktio $g\colon E\to\dot{\mathbb{R}}$, että

$$|f_j(x)|\le g(x)$$

kaikilla $j\in\mathbb{N}$ ja melkein kaikilla $x\in E$, niin funktio f on integroituva joukossa E ja

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty}\int_E f_j.$$

b) Käytetään Dominoidun konvergenssin lausetta (DKL). Huomataan aluksi, että

$$\int_1^k x^{-2}e^{x/k}\cos(x/k)\,dx = \int_1^\infty x^{-2}e^{x/k}\cos(x/k)\chi_{[1,k]}\,dx$$

jokaisella $k\in\mathbb{N}$. Määritellään funktiot $f_k\colon[1,\infty)\to\mathbb{R}$ kaavalla

$$f_k(x) = x^{-2}e^{x/k}\cos(x/k)\chi_{[1,k]}.$$

Funktiot f_k ovat jatkuvien kuvausten ($x\mapsto x^{-2}e^{x/k}\cos(x/k)$) ja mitallisten kuvausten ($x\mapsto\chi_{[1,k]}(x)$) tuloina mitallisia. Kosinin ja eksponenttifunktion jatkuvuuden perusteella jokaisella $x\in[1,\infty)$ pätee

$$f_k(x)\xrightarrow{k\to\infty}\frac{e^0\cos(0)}{x^2}=\frac{1}{x^2},$$

ja lisäksi jokaisella $k\in\mathbb{N}$ ja $x\in[1,\infty)$ pätee

$$|f_k(x)|\le x^{-2}e^{x/k}\chi_{[1,k]}\le x^{-2}e\chi_{[1,k]}\le\frac{e}{x^2}.$$

Funktio $g\colon[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=e/x^2$, on integroituva, sillä

$$\int_1^\infty\frac{e}{x^2}\,dx \overset{\text{L.3.32}}{=} \lim_{j\to\infty}\int_1^j\frac{e}{x^2}\,dx \overset{\text{L.3.19}}{=} \lim_{j\to\infty}\left[\frac{e}{x^2}\right]_0^j = e.$$

joten Dominoidun konvergenssin lauseen nojalla on voimassa

$$\lim_{k\to\infty}\int_1^\infty f_k(x)\,dx \overset{\text{DKL}}{=} \int_1^\infty\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{j\to\infty}\int_1^j\frac{1}{x^2}\,dx \overset{\text{L.3.19}}{=} \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = 1.$$

$\square$

Arvostelusta

- Kohdassa a) sai yhden pisteen, jos oli mainittu mitallinen funktiojono (f_j), majorantti g ja seuraus
$$\int_E f = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j.$$
Kahteen pisteeseen vaadittiin lisäksi oletus jonon (f_j) suppenemisesta sekä vähintään rajafunktion integroituvuuden maininta.
- Kohdassa b) sai yhden pisteen, jos oli osoittanut yhden DKL:n oletuksista tai maininnut vähintään kaksi. Kahteen pisteeseen vaadittiin jokaisen oletuksen osoittaminen.
- Toiset kaksi pistettä sai laskemalla raja-arvon DKL:n avulla; pisteellä sakotettiin, jos integraali laskettiin suoraan epäoleellisena Riemannin integraalina.

4. Olkoot $f_j\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia kuvauksia, joille pätee $f_j \geq 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Osoita, että tällöin pätee
$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \leq \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j.$$
[Vihje: Monotonisen konvergenssin lause.]

Ratkaisu. Määritellään funktiot $g_k\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, kaavalla
$$g_k(x) = \inf_{j\geq k} f_j(x).$$
Funktiot g_k ovat mitallisia Lauseen 2.23 nojalla ja kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on voimassa $0 \leq g_k \leq g_{k+1}$. Siten Monotonisen konvergenssin lauseen (MKL) oletukset ovat voimassa funktioille g_k.

Huomataan lisäksi, että kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee
$$g_k \leq f_k, \tag{1}$$
$$\lim_{k\to\infty} g_k = \liminf_{j\to\infty} f_j. \tag{2}$$
Koska funktiot $g_k \geq 0$ muodostavat kasvavan jonon, myös integraalien $\int_E g_k$ muodostama jono on kasvava. Erityisesti raja-arvo $\lim_{k\to\infty} \int_E g_k$ on olemassa ja (Lauseen 2.21 nojalla)
$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k = \liminf_{k\to\infty} \int_E g_k. \tag{3}$$
Yhdistämällä edelliset havainnot saamme
$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \overset{(2)}{=} \int_E \lim_{k\to\infty} g_k \overset{\text{(MKL)}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_E g_k \overset{(3)}{=} \liminf_{k\to\infty} \int_E g_k \overset{(1)}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k,$$
mikä todistaa väitteen. □

Arvostelusta

- Tarkasteltavan funktiojonon valinnasta 1 piste.
- MKL:n käytöstä 3 pistettä: kaksi oletusten perustelemisesta ja kolmas oikeasta päätelmästä.
- Epäyhtälön perustelusta sai yhden pisteen, jos mainitsi infimumin tai integraalin ominaisuudet. Kahteen vaadittiin molempien maininta oikeassa kontekstissa.