Mitta ja integraali, kesä 2014
Kurssikoe
19.6.2014

Koeaika 2 tuntia

---

1. a) Määrittele käsite Lebesguen ulkomitta. *2p*
   b) Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa? Perustele vastauksesi!
      i) Jos $m^*(A) > 0$, niin A sisältää epätyhjän avoimen joukon. *2p*
      ii) Jos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on rajoitettu, niin $m^*(A) < +\infty$. *2p*

2. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja olkoot kuvaukset $f_j \colon A \to \mathbb{R}$ mitallisia, $j \in \mathbb{N}$.
   a) Osoita, että joukot $\{x \in A \colon f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$ ovat mitallisia.
   b) Osoita, että joukko $\{x \in A \colon \text{ jono } (f_j(x))_{j=1}^{\infty} \text{ on aidosti kasvava}\}$ on mitallinen.

3. a) Muotoile Dominoidun konvergenssin lause oletuksineen (ei tarvitse todistaa). *2p*
   b) Määritä:

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k)\, dx.$$

   Muista perustelut! *4p*

4. Olkoot $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia kuvauksia, joille pätee $f_j \geq 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Osoita, että tällöin pätee

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \leq \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

   [Vihje: Monotonisen konvergenssin lause.]