Mitta ja integraali, kesä 2014
18.6.2014 järjestetyn kurssikokeen ratkaisut ja arvosteluperusteet
Olli Tapiola (`olli.tapiola@helsinki.fi`)

---

1. a) Määrittele käsitteet Lebesgue-mitallinen joukko ja Lebeguen mitta (ulkomitan käsitettä ei tarvitse määritellä).

   b) Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja, joille pätee $A \subseteq B$ ja $m(A) < +\infty$. Osoita, että

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

   c) Määritä $m(C)$, kun $C = [-2,2]^2 \setminus [-1,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Ratkaisu. a) Joukko $E \subseteq \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen, jos se toteuttaa Carathéodoryn ehdon: kaikilla joukoilla $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on voimassa

$$m_n^*(A) = m_n^*(A \cap E) + m_n^*(A \setminus E).$$

Lebesguen mitta m_n on Lebesguen ulkomitan m_n^* rajoittuma Lebesgue-mitallisten joukkojen kokoelmaan: $m_n = m_n^*|_{\mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n}$, jossa $\mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n := \{E \subseteq \mathbb{R}^n \colon E \text{ on Lebesgue-mitallinen}\}$.

b) Koska joukko A on mitallinen, niin Carathéodoryn ehdon nojalla pätee

$$m(B) = m(B \cap A) + m(B \setminus A) \overset{A \subseteq B}{=} m(A) + m(B \setminus A).$$

Koska puolestaan $m(A) < +\infty$, niin voimme kirjoittaa edellisen muodossa

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

c) Edelliskohdan ja n-välien ominaisuuksien nojalla saadaan

$$\begin{aligned} m(C) &\overset{\text{b)}}{=} m([-2,2]^2) - m([-1,1]^2) \\ &= \ell([-2,2]^2) - \ell([-1,1]^2) \\ &= (2-(-2))^2 - (1-(-1))^2 \\ &= 12. \end{aligned}$$

$\square$

Arvostelusta

- jokainen kohta +2p
- Kohdassa a) haettiin juurikin funktion m_n määritelmää. Epätarkkuuksista sakotettiin hiukan.
- Kaikki kokeen tehneet vastasivat oikein kohtiin b) ja c).

2. Määritellään funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(0) = 0$ ja $f(x) = k$, kun $\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Onko kuvaus f mitallinen? Muista perustella vastauksesi!

Ratkaisu. Osoitetaan kuvaus f mitalliseksi Lauseen 2.12 avulla osoittamalla, että joukko $E_a \coloneqq \{x \in [0,1] \colon f(x) \leq a\}$ on mitallinen jokaisella $a \in \mathbb{R}$. Olkoon siis $a \in \mathbb{R}$ ja olkoon $k_a \in \mathbb{Z}$ se yksikäsitteinen kokonaisluku, jolle pätee $k_a \leq a < k_a + 1$.

i) Jos $a < 0$, niin $E_a = \emptyset$, sillä $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0,1]$.

ii) Jos $0 < a < 1$, niin $E_a = \{0\}$, sillä $f(x) = 0$ tai $f(x) \geq 1$ kaikilla $x \in [0,1]$.

iii) Jos $a \geq 1$, niin luvun k_a määritelmän nojalla $x \in E_a$, jos ja vain jos $f(x) \leq k_a$. Erityisesti siis funktion f määritelmän nojalla $x \in E_a$, jos ja vain jos $x = 0$ tai $x \in \left(\frac{1}{k_a+1}, 1\right]$.

Yhdistämällä edelliset havainnot näemme, että

$$E_a = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } a < 0 \\ \{0\}, & \text{jos } 0 < a < 1 \\ \{0\} \cup \left(\frac{1}{k_a+1}, 1\right], & \text{jos } a \geq 1 \end{cases}.$$

Tyhjä joukko on mitallinen, joukko $\{0\}$ on suljettuna joukkona mitallinen (Lause 1.41) ja joukko $\{0\} \cup \left(\frac{1}{k_a+1}, 1\right]$ on suljetun joukon $\{0\}$ ja välin $\left(\frac{1}{k_a+1}, 1\right]$ yhdisteenä mitallinen (Lauseet 1.39, 1.41 ja 1.29). Siten joukko E_a on mitallinen jokaisella $a \in \mathbb{R}$, joten Lauseen 2.12 nojalla kuvaus f on mitallinen. $\square$

Arvostelusta

- Lauseen 2.12 käyttö +1p (kyseisen lauseen numeroa ei tietenkään tarvinnut muistaa)
- Jos lähti rohkeasti tutkimaan joukkoja E_a (tai vaihtoehtoisesti minkä tahansa avoimen joukon alkukuvaa), pisteitä tienasi sen mukaan, mihin asti päätelmissään pääsi. Täsmällinen muotoilu joukoille E_a ja perustelu niiden mitallisuudelle antoi täydet pisteet; pienistä virheistä sakotettiin hillitysti.

3. a) Muotoile Monotonisen konvergenssin lause oletuksineen (ei tarvitse todistaa). *2p*

b) Määritä:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx}\,dm(x), \qquad 0<s<1.$$

Muista perustelut! *4p*

Ratkaisu. a) Olkoot $f_j\colon E\to\dot{\mathbb{R}}$ mitallisia kuvauksia, joille pätee $0\le f_1\le f_2\le\ldots\le f_j\le f_{j+1}\le\ldots$. Tällöin

$$\lim_{j\to\infty}\int_E f_j=\int_E \lim_{j\to\infty} f_j.$$

b) Funktiot $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ ovat jatkuvina kuvauksina mitallisia. Lisäksi

$$f_n(x)=\frac{nx^s}{1+nx}=\frac{x^s}{1/n+x}\le\frac{x^s}{1/(n+1)+x}=\frac{(n+1)x^s}{1+(n+1)x}=f_{n+1}(x),$$

joten jono (f_n) on kasvava. Koska $f_n(x)\ge 0$ kaikilla $n\in\mathbb{N}$ ja $x\in[0,1]$, voimme soveltaa Monotonisen konvergenssin lausetta (MKL):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^s}{1+nx}\,dm(x) &\overset{\text{(MKL)}}{=} \int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{nx^s}{1+nx}\,dm(x)\\
&= \int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{x^s}{\frac{1}{n}+x}\,dm(x)\\
&= \int_0^1 x^{s-1}\,dm(x)\\
&\overset{\text{L.3.32 (iii)}}{=} \lim_{j\to\infty}\int_{1/j}^1 x^{s-1}\,dm(x)\\
&\overset{\text{L.3.19}}{=} \lim_{j\to\infty}\left[\frac{x^s}{s}\right]_{1/j}^1\\
&= \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Lauseen 3.19 avulla pystyimme siis laskemaan annetun integraalin Riemann-integraalina, mutta tätä varten meidän piti ensin muuttaa integraali raja-arvoksi, sillä funktio $x\mapsto x^{s-1}$ ei ole rajoittamattomana funktiona Riemann-integroituva välillä $[0,1]$ (mutta se on Riemann-integroituva jokaisella välillä $[1/j,1]$).

$\square$

Arvostelusta

- a-kohdan muotoilussa vaadittiin tiedot, että funktiot $f_j\colon E\to\dot{\mathbb{R}}$ ovat mitallisia, $f_j\ge 0$ kaikilla $j\in\mathbb{N}$ ja jono (f_j) on kasvava. Annetun integraalin täytyi olla yli joukon E.
- b-kohdassa MKL:n soveltaminen (ja siis oletusten huolellinen tarkistaminen) toi +2p. Loput pisteet tulivat integraalin laskemisesta ja Lebesgue-integraalin ominaisuuksien soveltamisesta.
- Laskuvirheistä sakotettiin sen mukaan, kuinka paljon ne helpottivat tehtävää.

4. Olkoot $A_j \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallisia joukkoja, joille pätee $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$. Osoita, että tällöin pätee

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(A_j).$$

Ratkaisu. Merkitään

$$\begin{aligned} A_0 &:= \emptyset \\ A'_j &:= A_j \setminus A_{j-1}, \end{aligned}$$

jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Koska $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, niin joukot A'_j ovat erillisiä (eli $A'_j \cap A'_i = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$). Huomataan, että

$$\bigcup_{j=1}^{M} A_j = \bigcup_{j=1}^{M} A'_j \tag{1}$$

kaikilla $M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Siten Lebesguen mitan täysadditiivisuuden (TA) nojalla

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &\overset{(1)}{=} m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j\right) \\ &\overset{\text{(TA)}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} m(A'_j) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} m(A'_j) \\ &\overset{\text{(TA)}}{=} \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{j=1}^{k} A'_j\right) \\ &\overset{(1)}{=} \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} m(A_k). \end{aligned}$$

$\square$

Arvostelusta

- Yhdisteen muokkaaminen erilliseksi +2p
- Täysadditiivisuuden hyödyntäminen +2p
- Loput argumentit +2p
- Yhden pisteen tienasi, jos oli päässyt jossakin edellisissä kohdissa edes hieman alkua pidemmälle.