Mitta ja integraali, kesä 2014
Kurssikoe
18.6.2014

Koeaika 2 tuntia

---

1. a) Määrittele käsitteet Lebesgue-mitallinen joukko ja Lebeguen mitta (ulkomitan käsitettä ei tarvitse määritellä).

   b) Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja, joille pätee $A \subseteq B$ ja $m(A) < +\infty$. Osoita, että
$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

   c) Määritä $m(C)$, kun $C = [-2,2]^2 \setminus [-1,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

2. Määritellään funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(0) = 0$ ja $f(x) = k$, kun $\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Onko kuvaus f mitallinen? Muista perustella vastauksesi!

3. a) Muotoile Monotonisen konvergenssin lause oletuksineen (ei tarvitse todistaa). *2p*

   b) Määritä:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx}\, dm(x), \qquad 0 < s < 1.$$
   Muista perustelut! *4p*

4. Olkoot $A_j \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallisia joukkoja, joille pätee $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$. Osoita, että tällöin pätee
$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(A_j).$$