Differentiaaliyhtälöt I
Luento 8

Toisen kertaluvun lineaariset DY:t (osa 3)

28. elokuuta 2014

Tavallinen lineaarinen yhtälöryhmä ja determinantti

Kurssilla on esiintynyt muutaman kerran muotoa

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \tag{1}$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2 \tag{2}$$

oleva lineaarinen yhtälöryhmä. Tässä $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) ovat vakioita ja luvut x, y tuntemattomia, joita yritetään ratkaista.

Määritellään avuksi vektorit

$$\mathbf{v}_1 = (b_1, -a_1) \quad \text{ja} \quad \mathbf{v}_2 = (b_2, -a_2)\,.$$

Tarkastellaan yhtälöä (1). On tasan kaksi mahdollisuutta:

(i) Sekä $a_1 = 0$ että $b_1 = 0$ (eli $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$). Yhtälö (1) on $0 = c_1$.

- Jos $c_1 \neq 0$, ei ole yhtään ratkaisua.
- Jos $c_1 = 0$, kaikki parit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ovat ratkaisuja.

(ii) Ainakin $a_1 \neq 0$ tai $b_1 \neq 0$ ($\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$). Yhtälö (1) on suoran yhtälö!

- Kaikki ko. suoran pisteet (x, y) toteuttavat yhtälön.
- Yhtälö **kuvaa vektorin $\mathbf{v}_1$ suuntaista suoraa**.

Vastaavasti yhtälölle (2).

Jo nyt nähdään, että seuraava väitteet ovat **yhtäpitäviä**:

1. Yhtälöparilla (1)–(2) on **yksikäsitteinen** ratkaisu **mielivaltaisilla** vakioiden c_1, c_2 arvoilla.
2. Yhtälöt kuvaavat **kahta erisuuntaista suoraa**.
3. vektorit $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ **eivät ole yhdensuuntaiset**. (Merkitään $\mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2$.)

Muistin virkistykseksi (valitse mieluisin oikealta puolelta ☺)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 0 \text{ vain vakioille } c_1 = c_2 = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_1 \text{ ja } \mathbf{v}_2 \text{ ovat lineaarisesti riippumattomat} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_1 \text{ ja } \mathbf{v}_2 \text{ virittävät koko tason } \mathbb{R}^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_1\text{:n ja } \mathbf{v}_2\text{:n virittämän suunnikkaan ala} \neq 0
\end{aligned}
$$

Siis

$$
\mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ -a_1 & -a_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0}
$$

On siis todistettu ensimmäinen osa seuraavasta tuloksesta:

Lause

(1) Yhtälöparilla (1)–(2) on yksikäsitteinen ratkaisu mielivaltaisilla vakioiden c_1, c_2 arvoilla jos ja vain jos

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0 \ .$$

(2) Siinä tapauksessa yksikäsitteinen ratkaisu on

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \quad \text{ja} \quad y = -\frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \ .$$

Osan 2 todistus: Koska yksikäsitteinen ratkaisu on olemassa, riittää tarkistaa, että se on todella tuo mainittu. □

(Lauseen todistus olisi yksinkertainen lineaarialgebran keinoin: olemme itse asiassa juuri laskeneet erään matriisin käänteismatriisin.)

Epähomogeeninen LY $\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = \boxed{r(x)}$

Osaamme nyt ratkaista **homogeeniyhtälön** $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ainakin kolmessa eri tapauksessa:

1. Vakiokertoimiset yhtälöt $y'' + ay' + by = 0$. Ratkeavat karakteristisen yhtälön $r^2 + ar + b = 0$ juurien avulla.
2. $y'' + p(x)y' = 0$ (eli $q \equiv 0$). Ratkeavat kertaluvun pudotuksella: sijoitus $z(x) = y'(x)$ tuottaa 1. kertaluvun separoituvan yhtälön.
3. Yksi ratkaisu y_1 tunnetaan ja sillä on ominaisuus $y_1(x) \neq 0$ kaikilla x. Ratkeavat vakion varioinnilla: yrite $y_2(x) = c(x)y_1(x)$ johtaa toiseen, riippumattomaan, ratkaisuun.

Tällä kertaa pyrimme löytämään ratkaisuja **epähomogeeniselle** lineaariselle yhtälölle $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ (LY).

Lause (todistus 3. viikon tehtävissä)

Jos y_3 on LY:n jokin erityisratkaisu ja (y_1, y_2) on HY:n perusjärjestelmä, niin **kaikki** LY:n ratkaisut ovat muotoa

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_3, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Tarvitaan siis keinoja löytää y_3, kun (y_1, y_2) on jo tunnettu.

Vakion variointi LY:n erityisratkaisulle

- Olkoon (y_1, y_2) HY:n perusjärjestelmä välillä I: $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ sisältää HY:n kaikki ratkaisut kyseisellä välillä.
- LY:n erityisratkaisu y_3 löytyy **vakion varioinnilla**, yritteellä

$$y_3(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \ .$$

Silloin

$$y_3' = (c_1' y_1 + c_2' y_2) + (c_1 y_1' + c_2 y_2') \ .$$

Koska riittää löytää **jokin** pari $(c_1(x), c_2(x))$, yksinkertaistetaan y_3':n lauseketta vaatimalla

$$\boxed{c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0} \ ,$$

jolloin jäljelle jää

$$y_3' = (c_1 y_1' + c_2 y_2') \ .$$

Edelleen,

$$y_3'' = (c_1' y_1' + c_2' y_2') + (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') \ .$$

Toisaalta on oltava

$$
\begin{aligned}
LY \quad &\Leftrightarrow \quad Ly_3 = r \\
y_3'' + py_3' + qy_3 &= r \\
(c_1'y_1' + c_2'y_2') + (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) &= r \\
(c_1'y_1' + c_2'y_2') + c_1(\underbrace{y_1'' + py_1' + qy_1}_{=0\ (HY)}) + c_2(\underbrace{y_2'' + py_2' + qy_2}_{=0\ (HY)}) &= r \\
\boxed{c_1'y_1' + c_2'y_2' = r}\ .
\end{aligned}
$$

On siis löydettävä pari $(c_1(x), c_2(x))$, joka toteuttaa yhtälöparin

$$
\begin{aligned}
c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0 \\
c_1'y_1' + c_2'y_2' &= r\ .
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Yhtälöparilla (3) on tasan yksi ratkaisu (c_1', c_2'):

$$
\begin{aligned}
c_1'(x) &= -\frac{r(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} = -\frac{r(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \\
c_2'(x) &= +\frac{r(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} = +\frac{r(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\ .
\end{aligned}
$$

Miksi $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$?

Koska yksi ratkaisu (c_1, c_2) riittää meille, voidaan siis valita

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= -\int \frac{r(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\, dx \\
c_2(x) &= +\int \frac{r(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\, dx \,.
\end{aligned}
$$

Nyt on nähty, että yllä olevilla valinnoilla

$$
y_3(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)
$$

on LY:n erityisratkaisu. Siten

$$
\begin{aligned}
y(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_3 \\
&= [C_1 + c_1(x)]y_1(x) + [C_2 + c_2(x)]y_2(x)
\end{aligned}
$$

mielivaltaisilla vakiolla $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ **sisältää LY:n kaikki ratkaisut**.

Huomioita edellisestä ratkaisusta:

- Käytännössä vaikein ongelma on nimenomaan homogeeniyhtälön perusjärjestelmän (y_1, y_2) löytäminen.
- Vaikka perusjärjestelmä olisi löytynyt, voivat $c_1(x)$ ja $c_2(x)$ sisältää niin vaikeita integraaleja, ettei ratkaisua y_3 voi esittää yksinkertaisessa muodossa.

Menetelmä LY:n $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ ratkaisemiseksi:

1. Kun HY:n perusjärjestelmä (y_1, y_2) tunnetaan, muodostetaan yrite $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$.
2. **Muistetaan** tehdä helpottava oletus $c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$.
3. HY:n avulla tämä johtaa yhtälöpariin

$$\begin{aligned} c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' &= r\ . \end{aligned}$$

4. Ratkaistaan $(c_1'(x), c_2'(x))$, josta saadaan integroimalla $(c_1(x), c_2(x))$.
5. LY:n ratkaisut: $y(x) = [C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]+[c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)]$.

Parametrein varustetut yritteet ja $y'' + ay' + by = r(x)$

Vakiokertoimiselle epähomogeeniselle LY:lle voi usein löytää erityisratkaisun **parametrein varustetun yritteen** avulla.

- Nopeampi tapa kuin vakion variointi.
- HY:n ratkaisua ei aina tarvita LY:n erityisratkaisun löytämiseksi.
- Perustuu arvaukseen: vaatii kokemusta ja hyvää vainua.

Esimerkki:

$$y'' + 3y' + 2y = 3x + 1 \ .$$

Koska (1) oikea puoli on polynomi ja (2) polynomin derivaatat ovat polynomeja, on hyvä arvaus tehdä yrite

$$y(x) = Ax + B \ .$$

Tällöin saadaan $y' = A$ ja $y'' = 0$ eli

$$3A + 2(Ax + B) = 3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \tfrac{3}{2}, \ B = -\tfrac{7}{4}.$$

Todellakin $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$ on erityisratkaisu.

Esimerkkejä hyvistä arvauksista:

- r on asteen m polynomi: yrite on asteen $\leq m$ polynomi
- $r = C \sin x$ tai $C \cos x$: $y = A \sin x + B \cos x$
- $r = Ce^{kx}$, k karakteristisen yhtälön juuri: $y = Ae^{kx}, Axe^{kx}, Ax^2 e^{kx}$.
- Kun r on tulo y.o. funktioista, myös yrite on tulojen lineaarikombinaatio. Esim $r = Cx^m e^{kx}$: $y = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_{m+2} x^{m+2}) e^{kx}$

Lineaarisuuden vuoksi tapauksessa $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ **voidaan käsitellä epähomogeeniset termit erikseen**:

$$Ly_1 = r_1 \quad \text{ja} \quad Ly_2 = r_2 \qquad \Rightarrow \qquad L(y_1 + y_2) = r_1 + r_2 = r \ .$$

Esimerkiksi yhtälölle

$$y'' + 3y' + 2y = 3x + 1 + e^{3x}$$

löydetään erityisratkaisu $y = y_1 + y_2 = (\frac{3}{2}x - \frac{7}{4}) + \frac{1}{20}e^{3x}$, kun yhtälöt

$$\begin{aligned} y_1'' + 3y_1' + 2y_1 &= 3x + 1 \\ y_2'' + 3y_2' + 2y_2 &= e^{3x} \end{aligned}$$

ratkaistaan **erikseen** yrittein $y_1(x) = Ax + B$ ja $y_2(x) = Ce^{3x}$. (Laskut monisteessa!)

Vielä yksi huomio parametrein varustetuista yritteistä: **yritteeksi ei kelpaa HY:n ratkaisu**. Jos yrite y on HY:n ratkaisu, niin

$$Ly = 0 \quad \text{eikä} \quad Ly = r.$$

Esimerkiksi yhtälöllä

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$$

on luonnolliselta vaikuttava yrite $y = Ae^{3x}$, joka kuitenkin ratkaisee homogeeniyhtälön $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Syy on se, että karakteristisella yhtälöllä $r^2 - 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow (r-3)^2 = 0$ on (tupla)juuri $r = 3$, joten (e^{3x}, xe^{3x}) on perusjärjestelmä.

Jos yrite $y_1(x)$ ratkaisee HY:n, kannattaa yrite $y_2(x) = xy_1(x)$.

Esimerkin tapauksessa **sekin ratkaisee HY:n**. Toistetaan temppu ja kokeillaan yritettä $y_3(x) = xy_2(x) = x^2y_1(x)$. Yrite

$$y_3(x) = Ax^2e^{3x}$$

todella ratkaisee LY:n, kun $A = \frac{1}{2}$.