Differentiaaliyhtälöt I
Luento 7

Toisen kertaluvun lineaariset DY:t (osa 2)

27. elokuuta 2014

Lyhyt kertaus HY:lle $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Tässä p ja q jatkuvia välillä I.

Kaksi ratkaisua $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ muodostavat **perusjärjestelmän**, jos

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

sisältää yhtälön **kaikki ratkaisut**.

Näin on **täsmälleen silloin**, kun **Wronskin determinantti**

$$\boxed{W(x_0) = W(y_1, y_2)(x_0) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0}$$

jossakin pisteessä $x_0 \in I$, eli yhtäpitävästi **kaikissa** I:n pisteissä.

- Perusjärjestelmän löytäminen jollekin annetulle yhtälölle on usein vaikeaa tai mahdotonta, mutta sellainen on **aina olemassa**. (OY)
- Perusjärjestelmä **ei ole yksikäsitteinen**.

Vakiokertoiminen HY $y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$

- Muistetaan, että $y'' - y = 0 \Leftrightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Yleisen tapauksen ratkaisu perustuu **yritteeseen**

$$y(x) = e^{rx} \, ,$$

missä r on toistaiseksi määrittämätön vakio. Silloin

$$\begin{aligned} & y'' + ay' + by = 0 \\ \Leftrightarrow\; & r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0 \\ \Leftrightarrow\; & \boxed{r^2 + ar + b = 0} \, . \end{aligned}$$

Alin näistä on nk. **karakteristinen yhtälö**. Sen juuret ovat tunnetusti

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = r_\pm \, .$$

Näyttää, että saamme ratkaisut $\boxed{y_\pm(x) = e^{r_\pm x}}$.

- $y'' - y = 0$ ($a = 0, b = -1$): $r = \pm 1$ eli $y_\pm(x) = e^{\pm x}$. (Perusjärj.)

Kolme tapausta:

1. $a^2 - 4b > 0$, jolloin $r_+ \neq r_-$ reaaliset.
2. $a^2 - 4b = 0$, jolloin $r_+ = r_-$ reaalinen.
3. $a^2 - 4b < 0$, jolloin $r_+ \neq r_-$ aidosti kompleksiset ja $r_+ = \bar{r}_-$. [1]

Tarkistetaan Wronskin determinantti tapauksessa 1:

$$W(y_+, y_-)(0) = \begin{vmatrix} y_+(0) & y_-(0) \\ y_+'(0) & y_-'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_+ & r_- \end{vmatrix} = r_- - r_+ \neq 0.$$

Saatiin todistettua seuraava tulos:

Lause tapaukselle $r_+ \neq r_-$ reaaliset

$(y_+, y_-) = (e^{r_+ x}, e^{r_- x})$ on vakiokertoimisen HY:n perusjärjestelmä.

[1]Jos $u, v \in \mathbb{R}$Kompleksiluvun $z = u + vi$ kompleksikonjugaatti on $\bar{z} = u - vi$.

Tap. 2 ($a^2 = 4b$, $r = r_+ = r_- = \frac{a}{2}$) **yksi** ratkaisu $y_1(x) = e^{rx} = e^{-\frac{a}{2}x}$.

Toinen **vakion varioinnilla**, eli **yritteellä** $y_2(x) = C(x)y_1(x) = C(x)e^{-\frac{a}{2}x}$:

$$
\begin{aligned}
HY \quad &\Leftrightarrow \quad y_2'' + ay_2' + \tfrac{1}{4}a^2 y_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (C'' - aC' + C\tfrac{a^2}{4}) + a(C' - \tfrac{a}{2}C) + \tfrac{1}{4}a^2 C = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad C'' = 0 \\
&\Leftarrow \quad C(x) = x\,.
\end{aligned}
$$

Siis $y_2(x) = xe^{rx}$ on ratkaisu. Tarkistetaan Wronskin determinantti:

$$
W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0.
$$

Saatiin todistettua seuraava tulos:

Lause tapaukselle $r_+ = r_- = r$

$(y_1, y_2) = (e^{rx}, xe^{rx})$ on vakiokertoimisen HY:n perusjärjestelmä.

- $y'' - 2y' + y = 0$: $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = 1$. $(y_1, y_2) = (e^x, xe^x)$ pj.

Tapauksessa 3 ($r_+ \neq r_- = \bar{r}_+ \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) funktiot $y_\pm(x) = e^{r_\pm x}$

- ratkaisevat HY:n $y'' + ay' + by = 0$ (karakteristinen yhtälö $\Leftrightarrow$ HY)
- ovat **kompleksiarvoisia**: Merkinnällä $r_+ = u + iv$ ja $r_- = u - iv$ [2]

$$\begin{aligned} e^{r_\pm x} = e^{ux \pm ivx} = e^{ux} e^{\pm ivx} &= e^{ux}(\cos vx \pm i \sin vx) \\ &= e^{ux} \cos vx \pm i\, e^{ux} \sin vx \end{aligned}$$

(De Moivre'n kaava. Eulerin kaava: $e^{it} = \cos t + i \sin t \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$.)

Yleinen havainto: jos $y(x) = f(x) + i\, g(x)$ on HY:n ratkaisu, missä f, g ovat **reaaliarvoisia** funktioita, niin **lineaarisuudesta** seuraa

$$\begin{aligned} Ly = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad L(f + i\, g) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Lf + i\, Lg = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad Lf = 0 \quad \text{ja} \quad Lg = 0. \end{aligned}$$

Sekä y:n reaali- että imaginaariosa ovat (reaaliarvoisia) ratkaisuja.

Opetus: sekä $\boxed{y_1(x) = e^{ux} \cos vx}$ että $\boxed{y_2(x) = e^{ux} \sin vx}$ ovat HY:n reaaliarvoisia ratkaisuja.

[2] Siis $\operatorname{Re} r_\pm = u$ ja $\operatorname{Im} r_\pm = \pm v$; reaali- ja imaginaariosa.

Tarkistetaan Wronskin determinantti tapauksessa 3:

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u & v \end{vmatrix} = v \neq 0.$$

(Miksi $v \neq 0$?)

Saatiin todistettua seuraava tulos:

Lause tapaukselle $r_+, r_- \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Merkitään karakteristisen yhtälön jompaakumpaa juurta $u + iv$. Silloin pari $(y_1, y_2) = (e^{ux} \cos vx, e^{ux} \sin vx)$ on vakiokertoimisen HY:n perusjärjestelmä.

- $y'' + 2y' + 4y = 0$. Karakteristinen yhtälö on $r^2 + 2r + 4 = 0$, joten $r = -1 \pm i\sqrt{3}$. Merkitsemällä $u = -1$ ja $v = \sqrt{3}$ nähdään, että $(y_1, y_2) = (e^{-x} \cos \sqrt{3}x, e^{-x} \sin \sqrt{3}x)$ on perusjärjestelmä.

Kertaluvun pudotus yhtälölle $y'' + p(x)y' = r(x)$

- Tässä siis $q \equiv 0$, ja p, r ovat jatkuvia jollakin välillä I.
- Sijoituksella $z(x) = y'(x)$ saadaan **1. kertaluvun** lineaarinen DY

$$
\begin{aligned}
& z' + p(x)z = r(x) \qquad \big| \cdot \mu(x) = e^{\int p\,dx} \\
\Leftrightarrow\ & (\mu z)' = \mu r \\
\Leftrightarrow\ & \mu z = \int \mu r\,dx + C_1 \\
\Leftrightarrow\ & z = \frac{1}{\mu} \int \mu r\,dx + C_1 \frac{1}{\mu} \\
\Leftrightarrow\ & y' = \frac{1}{\mu} \int \mu r\,dx + C_1 \frac{1}{\mu} \\
\Leftrightarrow\ & y = \int \left(\frac{1}{\mu} \int \mu r\,dx + C_1 \frac{1}{\mu} \right) dx + C_2
\end{aligned}
$$

- Tässä on yhtälön kaikki ratkaisut.

Vakion varioiminen ja HY $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

- Oletetaan, että $y_1 : I \to \mathbb{R}$ on ratkaisu ja $\boxed{y_1(x) \neq 0 \;\forall\, x \in I}$.
- Etsitään toinen ratkaisu yritteellä $y_2(x) = c(x)y_1(x)$:

$$
\begin{aligned}
HY \quad &\Leftrightarrow \quad y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad c''y_1 + c'[2y_1' + py_1] + c[\underbrace{y_1'' + py_1' + qy_1}_{=0}] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad c''y_1 + c'[2y_1' + py_1] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad c'' + \frac{2y_1' + py_1}{y_1}c' = 0\,.
\end{aligned}
$$

Saatiin yhtälö c:lle, jossa esiintyy vain c' ja c''. Kertaluvun pudotus (sijoitus $z = c'$) johtaa lopulta ratkaisuun[3]

$$c(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx}\,dx$$

eli

$$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx}\,dx}\,.$$

[3]Yksi ratkaisu riittää tarpeisiimme.

Varmistetaan, että (y_1, y_2) on **perusjärjestelmä**:

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = y_1(c' y_1 + c y_1') - c y_1 y_1' = c' y_1^2$$
$$= \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx} y_1^2 = e^{-\int p\,dx} \neq 0.$$

Olemme todistaneet seuraavan tuloksen:

Lause (HY $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ja vakion variointi)

Olkoot $p, q : I \to \mathbb{R}$ jatkuvia välillä I. Jos homogeeniyhtälöllä $y'' + py' + qy = 0$ on sellainen ratkaisu y_1, että $y_1(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$, niin toinen ratkaisu löytyy yritteellä $y_2(x) = c(x)y_1(x)$. Pari (y_1, y_2) muodostaa silloin perusjärjestelmän välillä I, eli $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$.

Ekstraa: $W(x)$, riippumattomuus, yleinen kertaluku

Harjoituksissa on todettu, että $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ tarkoittaa ratkaisujen **lineaarista riippumattomuutta**, eli $c_1 y_1 + c_2 y_2 \equiv 0$ vain silloin, kun vakiot $c_1 = c_2 = 0$.

Sama pätee korkeamman kertaluvun lineaarisille homogeeniyhtälöille

$$y^{(k)} + p_{k-1}(x) y^{(k-1)} + \cdots + p_1(x) y^{(1)} + p_0(x) y = 0.$$

Tässä kerroinfunktiot p_i olkoot jatkuvia välillä $I \subset \mathbb{R}$.

Ratkaisut $y_1, \ldots, y_k : I \to \mathbb{R}$ muodostavat **perusjärjestelmän**, jos jossakin (ja silloin jokaisessa) pisteessä $x \in I$ **Wronskin determinantti**

$$W(y_1, \ldots, y_k)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_k(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)}(x) & \cdots & y_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \,. \tag{1}$$

Voidaan osoittaa, että (1) on yhtäpitävää ratkaisujen lineaarisen riippumattomuuden kanssa:

$$c_1 y_1 + \cdots + c_k y_k \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \cdots = c_k = 0 \,.$$