Differentiaaliyhtälöt I
Luento 6

Sovelluksia (osa 3)
Toisen kertaluvun lineaariset DY:t

21. elokuuta 2014

Vielä yksi sovellus: takaa-ajomalli

- Saalis liikkuu tasossa pitkin tunnettua rataa $(a(t), b(t))$.
  - Yksinkertaisuuden vuoksi saalis liikkukoon pystysuoraan vakionopeudella $\beta > 0$: $(a(t), b(t)) = (a, \beta t)$, missä myös $a > 0$ vakio.
- Saalistajan koordinaatit ovat $(x(t), y(t))$ ja $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.
  - Saalistaja liikkuu suoraan kohti saalista vakiovauhdilla $\alpha = |\mathbf{v}| > \beta$.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

on **nopeusvektori**, jonka pituus on siis vakio:

$$|\mathbf{v}| = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{v}|^2 = \alpha^2 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = \alpha^2. \tag{1}$$

Vektorin $\mathbf{v}(t)$ **suunta vaihtelee** koko ajan saaliin sijainnin mukaan. Se on itse asiassa saalistajan liikeradan **tangenttivektori**.

Saako saalistaja saaliin kiinni? Jos saa, milloin ja missä?

Kaksi tuntematonta: $x(t)$ ja $y(t)$. Tarvitaan **kaksi** differentiaaliyhtälöä.

Hetkellä t saalistaja on kulkenut yhtälön (1) mukaan matkan

$$\alpha t = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2}\, d\tau \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2}\, d\tau} \, .$$

Saalistajan radan normaalivektori $\mathbf{n}(t)$ on kohtisuorassa tangenttivektoria $\mathbf{v}(t)$ vasten. Siis $\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$ kaikilla t. Voidaan valita

$$\mathbf{n}(t) = (\dot{y}(t), -\dot{x}(t)) \; .$$

Saaliin paikkavektori saalistajan suhteen on

$$\mathbf{r}(t) = (a(t) - x(t), b(t) - y(t)) = (a - x(t), \beta t - y(t)),$$

joka oletettiin $\mathbf{v}(t)$:n suuntaiseksi. Siispä

$$0 = \mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = \dot{y}(t)[a - x(t)] - \dot{x}(t)[\beta t - y(t)]$$

eli

$$(a - x)\dot{y} = (\beta t - y)\dot{x} \; .$$

On tilanteesta selvää, että $\dot{x}(t) > 0$. Ratkaisemalla t,

$$\boxed{t = \frac{1}{\beta}\left(y + (a - x)\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)} \, .$$

Takaa-ajomallin ratkaisu: eliminoidaan t

Yhdistetään yhtälöt:

$$\tfrac{1}{\beta}\left(y+(a-x)\tfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=\tfrac{1}{\alpha}\int_0^t\sqrt{\dot{x}(\tau)^2+\dot{y}(\tau)^2}\,d\tau=\tfrac{1}{\alpha}\int_0^t\sqrt{1+\left(\tfrac{\dot{y}(\tau)}{\dot{x}(\tau)}\right)^2}\,\dot{x}(\tau)\,d\tau\,.$$

Käyttämällä lyhennysmerkintöjä

$$\dot{x}(\tau)\,d\tau=\frac{dx}{d\tau}d\tau=dx \quad \text{ja} \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dx}=y'\,,$$

saadaan heti

$$\frac{1}{\beta}\left(y+(a-x)y'\right)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x\sqrt{1+y'(\tilde{x})^2}\,d\tilde{x}\,.$$

Derivoimalla x:n suhteen

$$\frac{1}{\beta}(a-x)y''=\frac{1}{\alpha}\sqrt{1+y'^2}\,.$$

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö!

Yhtälö **palautuu ensimmäiseen kertalukuun** sijoituksella $z(x) = y'(x)$:

$$\frac{1}{\beta}(a - x)z' = \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + z^2}\ .$$

Yhtälö on **separoituva** ja saadaan (luentomoniste!)

$$z + \sqrt{1 + z^2} = D(a - x)^{-\beta\alpha^{-1}}.$$

Koska $x(0) = y(0) = 0$, on $z(0) = y'(0) = \frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)} = 0$, joten $D = a^{\beta a^{-1}}$:

$$z + \sqrt{1 + z^2} = (1 - xa^{-1})^{-\beta\alpha^{-1}}$$

Neliöimällä yhtälö puolittain saadaan ($\dot{x} > 0, \dot{y} > 0 \Rightarrow z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} > 0$)

$$z = (1 - xa^{-1})^{-\beta\alpha^{-1}} + (1 - xa^{-1})^{\beta\alpha^{-1}}.$$

Saadaan integroimalla (alkuehto määrää vakion!)

$$y(x) = \frac{a}{2}\left(\frac{(1 - xa^{-1})^{1+\beta\alpha^{-1}}}{1 + \beta\alpha^{-1}} - \frac{(1 - xa^{-1})^{1-\beta\alpha^{-1}}}{1 - \beta\alpha^{-1}}\right) + \frac{a\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\ .$$

Harjoituksissa selviää, saako saalistaja saaliinsa kiinni ☺.

Toisen kertaluvun lineaariset differentiaaliyhtälöt

Olkoon $F : D \to \mathbb{R}$ avoimessa joukossa $D \subset \mathbb{R}^4$ määritelty funktio.

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

on **toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö** funktiolle $y = y(x)$.

- Mahdollista ratkaista vain erikoistapauksissa.

Toisen kertaluvun **lineaarisen** DY:n **standardimuoto** (LY):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

- Oletetaan, että p, q, r ovat jatkuvia avoimella välillä $I \subset \mathbb{R}$.
- Jos p ja q ovat vakioita, on yhtälö **vakiokertoiminen**.
- **Homogeeniyhtälö** (HY) vastaa tapausta $r = 0$:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Aivan kuten 1. kertaluvun lineaarisen yhtälön tapauksessa,

$$LY \quad \Leftrightarrow \quad Ly = r \qquad \text{ja} \qquad HY \quad \Leftrightarrow \quad Ly = 0 \,,$$

kun määritellään (2. kertaluvun) **differentiaalioperaattori** L kaavalla

$$(Ly)(x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x).$$

Lause

Operaattori L on **lineaarinen**. Toisin sanoen jokaiselle funktioparille $y_1, y_2 \in C^2(I)$ [1] ja vakioille $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ pätee

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L y_1 + c_2 L y_2 .$$

Todistus: Harjoitustehtävä.

Seuraus (Superpositioperiaate HY:lle)

Jos y_1, y_2 ovat HY:n ratkaisuja, niin myös $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ on ratkaisu.

Todistus: $Ly = L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L y_1 + c_2 L y_2 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0.$ □

[1] $C^k(I)$ on kaikkien niiden funktioiden $y : I \to \mathbb{R}$ joukko, jotka ovat k kertaa jatkuvasti derivoituvia välillä I. $C(I)$ puolestaan on jatkuvien funktioiden joukko.

2. kertaluvun lineaarisen DY:n OY-lause

Lause

Olkoot $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli; p, q, r jatkuvia välillä I; ja $x_0 \in I$. AAT:llä

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad \boxed{y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1}$$

on **koko välillä** I ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$. Kaikki muut I:n osavälillä annetut AAT:n ratkaisut ovat tämän rajoittumia.[2]

Todistus: DY II

- Globaali lause: ratkaisu on määritelty koko välillä I.
- Alkuehtoja on kaksi: yleisessä ratkaisussa on **kaksi** oleellista parametria, joiden määrittämiseen tarvitaan **kaksi** ehtoa.

[2] Jos $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ on ratkaisu osavälillä $\tilde{I} \subset I$, niin silloin $\tilde{y}(x) = y(x)$ kaikilla $x \in \tilde{I}$, eli $\tilde{y}$ on y:n rajoittuma I:n osavälille $\tilde{I}$. Merkitään $\tilde{y} = y|_{\tilde{I}}$.

Perusjärjestelmä HY:lle $y'' - y = 0$

Kaksi ratkaisua $y_1(x) = e^x$ ja $y_2(x) = e^{-x}$. **Superpositioperiaate**:

$$\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{2}$$

on yleinen ratkaisu.

Ovatko tässä **kaikki** ratkaisut? Toisin sanoen, sisältyykö AAT:n

$$\begin{aligned} y(x_0) &= z_0 \\ y'(x_0) &= z_1 \end{aligned}$$

(yksikäsitteinen) ratkaisu yleiseen ratkaisuun **mielivaltaisilla** z_0, z_1?

$$\begin{aligned} c_1 e^{x_0} + c_2 e^{-x_0} &= z_0 \\ c_1 e^{x_0} - c_2 e^{-x_0} &= z_1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan helposti $c_1 = \frac{1}{2}(z_0 + z_1)e^{-x_0}$ ja $c_2 = \frac{1}{2}(z_0 - z_1)e^{x_0}$.

Siis **kaikki ratkaisut** saadaan kaavasta (2).

Sanomme, että pari (y_1, y_2) on HY:n $y'' - y = 0$ **perusjärjestelmä**.

Perusjärjestelmä HY:lle $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Olkoot y_1 ja y_2 kaksi ratkaisua välillä I. Superpositioperiaate:

$$\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{3}$$

on myös ratkaisu välillä I.

Sanomme, että pari (y_1, y_2) on HY:n **perusjärjestelmä**, *jos kaikki ratkaisut välillä I saadaan kaavasta* (3).

Onko (y_1, y_2) todella perusjärjestelmä? $\forall\, z_0, z_1$ pitäisi löytää c_1, c_2:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = z_0 \quad \mid \cdot\, y_1'(x_0) \\ y'(x_0) &= c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = z_1 \quad \mid \cdot\, y_1(x_0) \end{aligned}$$

Eliminoimalla c_1 saadaan

$$c_2[y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0)] = y_1(x_0)z_1 - y_1'(x_0)z_0$$

ja eliminoimalla c_2

$$c_1[y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0)] = y_2'(x_0)z_0 - y_2(x_0)z_1\ .$$

Voidaan todistaa lineaarialgebran menetelmin, että mielivaltaiselle parille z_0, z_1 on olemassa alkuarvotehtävän $y(x_0) = z_0, y'(x_0) = z_1$ ratkaisevat yksikäsitteiset kertoimet c_1 ja c_2, **jos ja vain jos**

$$\boxed{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0}\,.$$

Määritellään tämän motivoimana **Wronskin**[3] **determinantti**

$$W(x) = W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

Yllä olevasta päättelystä seuraa:

Lause

Olkoot p, q jatkuvia ja y_1, y_2 HY:n $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ratkaisuja välillä I. Tällöin pari (y_1, y_2) on HY:n perusjärjestelmä, jos ja vain jos $W(x) \neq 0$ kaikissa pisteissä $x \in I$.

Huom! Harjoituksissa osoitetaan, että $W(x) \neq 0$ **kaikissa** pisteissä $x \in I$ jos ja vain jos $W(x_0) \neq 0$ ainakin **yhdessä** pisteessä $x_0 \in I$.

[3] Wikipedian mukaan Józef Maria Hoene-Wroński (1776–1853) oli puolalainen filosofi, matemaatikko, fyysikko, keksijä, lakimies ja taloustieteilijä.

- **Yhteenveto**: Jos HY:lle $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ löytyy kaksi sellaista ratkaisua $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$, että (y_1, y_2) on perusjärjestelmä [eli $W(x_0) \neq 0$ ainakin yhdellä $x_0 \in I$], niin HY:n kaikki ratkaisut saadaan lineaarikombinaatioina $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.
- Aiempi esimerkki uudelleen: $y'' - y = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$. $W(x) = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = -2 \ \forall x \in \mathbb{R}$, erityisesti yhdessä pisteessä. Siis (e^x, e^{-x}) on perusjärjestelmä, aivan kuten todettiin.

Perusjärjestelmän löytäminen onnistuu vain **erityistapauksissa**. Sellainen kuitenkin **on olemassa**:

Lause

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli ja $p, q \in C(I)$. Tällöin HY:llä $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ on perusjärjestelmä välillä I.

Lauseen todistus

Valitaan $x_0 \in I$ mielivaltaisesti. OY-lauseen nojalla HY:lle löytyy sellaiset ratkaisut $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$, että

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 1, \quad y_1'(x_0) = 0 \\ y_2(x_0) &= 0, \quad y_2'(x_0) = 1 \end{aligned}$$

Silloin

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Siis (y_1, y_2) on perusjärjestelmä. $\square$