Differentiaaliyhtälöt I
Luento 5

Sovelluksia (osa 2)
Kvalitatiivista analyysia

20. elokuuta 2014

Logistinen malli

Viime kerralla johdettiin **logistinen yhtälö**

$$\dot{N}(t) = r\,N(t)\left(1 - \tfrac{N(t)}{K}\right), \qquad N(0) = N_0.$$

Tässä ”ympäristön kantokyky” $K > 0$ (eli $r = (\beta - \mu + \frac{1}{2}\alpha) > 0$) ja $N(t)$ on populaation koko hetkellä t.

Tämä on muodoltaan Bernoullin yhtälö ($\lambda = 2$), jolle johdettiin eksplisiittinen ratkaisu (sijoituksella $z(t) = N(t)^{1-\lambda} = N(t)^{-1}$).

Tutustutaan tällä kertaa kuitenkin **kvalitatiiviseen**[1] **analyysiin**.

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue. Tutkitaan DY:n $y' = f(x,y)$ ratkaisuja y, joiden kuvaaja $\{(x, y(x))\}$ kulkee alueessa D. **Tuntematta ratkaisuakin** nähdään heti, että

- jos $f > 0$ (tai ≥ 0) D:ssä, niin y:n kuvaaja on (aidosti) kasvava;
- jos $f < 0$ (tai ≤ 0) D:ssä, niin y:n kuvaaja on (aidosti) vähenevä.

[1] Kvalitatiivinen eli laadullinen, erona kvantitatiiviseen eli määrälliseen.

Kvalitatiivinen analyysi logistiselle yhtälölle (AAT)

$$\dot{N}(t) = r\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \qquad N(t_0) = N_0.$$

Sekä $f(t,N) = r\,N\left(1-\frac{N}{K}\right)$ että $\frac{\partial f}{\partial N}(t,N)$ on jatkuva **koko tasossa** $\mathbb{R}^2$.

- Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause pätee koko tasossa:
  - Jokaisen pisteen (t_0, N_0) läpi kulkee **yksikäsitteinen ratkaisu**.
- Poistumislause pätee koko tasossa:
  - Kyseisen ratkaisun **kuvaajan hännät poistuvat äärettömyyteen**.

Tutkitaan hetkiä $t \geq 0$ eli aluetta $D = \{(t,N) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \geq 0,\ N \geq 0\}$.
Olkoon alkuehto $N(0) = N_0$ (missä siis $t_0 = 0$).

- Triviaaliratkaisut:

$$\boxed{N \equiv 0 \quad \text{ja} \quad N \equiv K}\,.$$

- Kaksi ratkaisukäyrää ei voi leikata toisiaan! (Yksikäsitteisyys)
- Kaikille epätriviaaleille ratkaisuille pätee siis N_0:sta riippuen joko[2]

$$\boxed{0 < N(t) < K \quad \text{tai} \quad N(t) > K \qquad \textbf{kaikilla } t \geq 0}\,.$$

[2]Se, että ratkaisut on määritelty **kaikilla** $t \geq 0$, on poistumislauseen seuraus.

Lisähavainnot kahdessa tapauksessa:

1. Alueessa $\{(t, N) \,:\, t \geq 0,\ 0 < N < K\}$ pätee $f(t, N) > 0$. Siis
$$0 < N_0 < K \quad \Rightarrow \quad \dot{N}(t) > 0 \quad \forall\, t \geq 0.$$
2. Alueessa $\{(t, N) \,:\, t \geq 0,\ K < N\}$ pätee $f(t, N) < 0$. Siis
$$N_0 > K \quad \Rightarrow \quad \dot{N}(t) < 0 \quad \forall\, t \geq 0.$$

Näiden seuraukset:

1. $0 < N_0 < K$: $N(t)$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu ($N(t) < K$). Eli
$$\exists \lim_{t \to \infty} N(t) \in (N_0, K].$$
2. $N_0 > K$: $N(t)$ on vähenevä ja alhaalta rajoitettu ($N(t) > K$). Eli
$$\exists \lim_{t \to \infty} N(t) \in [K, N_0)$$

Mutta mikä on raja-arvo tarkalleen?

Seuraavaksi osoitetaan, että kaikilla $N_0 > 0$ pätee itse asiassa
$$\lim_{t \to \infty} N(t) = K\ .$$

Tulkinta?!

Väite: $\lim_{t\to\infty} N(t) = K$, kunhan $N_0 > 0$

Tarkastellaan vain tapausta $0 < N_0 < K$, sillä tapaus $N_0 > K$ on samantapainen.

1. Merkitään $N_\infty = \lim_{t\to\infty} N(t)$. Tämä raja-arvohan on olemassa.
2. Merkitään myös $\dot{N}_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{N}(t)$. Raja-arvo on olemassa:

$$\dot{N}_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{N}(t) = \lim_{t\to\infty} r\,N(t)\left(1 - \tfrac{N(t)}{K}\right) = r\,N_\infty\left(1 - \tfrac{N_\infty}{K}\right).$$

3. Kohta perustellaan, että

$$\boxed{\dot{N}_\infty = 0}\,.$$

Siispä

$$0 = \dot{N}_\infty = r\,N_\infty\left(1 - \tfrac{N_\infty}{K}\right).$$

Toisin sanoen

$$N_\infty = K \quad (\text{tai } N_\infty = 0).$$

Perustellaan yleisellä tuloksella, että $\dot{N}_\infty = 0$.

Lause

Olkoon $x : [t_0, \infty) \to \mathbb{R} : x = x(t)$ sellainen derivoituva funktio, että raja-arvot $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t)$ ja $\dot{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)$ ovat olemassa. Silloin pätee

$$\dot{x}_\infty = 0.$$

Harjoitellaan **epäsuoraa todistusta**: Tehdään **vastaoletus** $\dot{x}_\infty > 0$. (Tapaus $\dot{x}_\infty < 0$ on samantapainen.) Silloin on $\exists$ sellainen $t_1 > t_0$, että

$$\dot{x}(t) \geq \tfrac{1}{2}\dot{x}_\infty > 0 \quad \forall\, t \geq t_1.$$

Tästä seuraa

$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} \dot{x}(\tau)\, d\tau \geq \int_{t_1}^{t} \tfrac{1}{2}\dot{x}_\infty\, d\tau = (t - t_1)\tfrac{1}{2}\dot{x}_\infty \quad \forall\, t \geq t_1.$$

Siis

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \geq x(t_1) - t_1 \tfrac{1}{2}\dot{x}_\infty + \tfrac{1}{2}\dot{x}_\infty \lim_{t\to\infty} t = \infty.$$

Tämä on **ristiriidassa** oletuksen $x_\infty \in \mathbb{R}$ kanssa. Vastaoletus $\dot{x}_\infty > 0$ (ja myös $\dot{x}_\infty < 0$) on siis virheellinen, joten $\dot{x}_\infty = 0$. $\square$

Lisää sovelluksia

Tänään käsittelemme **tartuntatautimalleja**:

- SIS-malli (sairaus ei aiheuta immuniteettia)
- SIR-malli (sairaus aihettaa immuniteetin)

Tavoitteena on tutkia, kuinka moni yksilö vakiokokoisesta populaatiosta on kullakin ajanhetkellä $t \geq 0$

- **terveitä**, mutta sairaudelle alttiita (**S** = susceptible)
- **sairaita**, tartunnan välittäjiä (**I** = infective)
- **immuuneja**, sairauden vaikutuspiiristä poistuneita (**R** = removed)

SIS-malli

- Kun terve yksilö sairastuu, hän siirtyy luokasta S luokkaan I.
- Kun sairas yksilö tervehtyy, hän siirtyy luokasta I luokkaan S. Sama yksilö **voi sairastua uudelleen**.

Mallin matemaattiset oletukset:

- Populaation koko on vakio $N > 0$:

$$S(t) + I(t) = N \qquad \forall\, t \geq 0.$$

- Infinitesimaalisen lyhyellä aikavälillä $[t, t + dt]$ kunkin terveen yksilön sairastumisherkkyys on $\beta I(t)$, missä $\beta > 0$ on nk. **tarttumisintensiteetti**:

$$\dot{S}(t) = -\beta I(t) S(t) + ??$$

- Sairas yksilö **tervehtyy intensiteetillä** $\alpha > 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -\beta I(t) S(t) + \alpha I(t) \\ \dot{I}(t) &= +\beta I(t) S(t) - \alpha I(t) \end{aligned}}$$

Differentiaaliyhtälösysteemi!

SIS-mallin ratkaisu

Systeemi on helppo ratkaista, sillä $I(t) = N - S(t)$:

$$\dot{I} = \beta I(N - \tfrac{\alpha}{\beta} - I) = r\,I\left(1 - \tfrac{I}{K}\right),$$

missä $K = N - \frac{\alpha}{\beta}$ ja $r = \beta K$. Oletetaan nyt $\boxed{K > 0}$, eli että tervehtymisintensiteetin ja sairastuvuusintensiteetin suhde on populaation kokoa pienempi.

Logistinen yhtälö!

Sille jo osoitimme (kun $K > 0$), että

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = K.$$

Tauti on siis **endeeminen**, eli sitä esiintyy populaatiossa jatkuvasti, suurinpiirtein yhtä paljon. (Esim. klamydia Suomessa.)

SIR-malli

- Kun terve yksilö sairastuu, hän siirtyy luokasta S luokkaan I.
- Kun sairas yksilö tervehtyy, hän siirtyy luokasta I luokkaan R. Immuunina yksilönä hän **ei voi sairastua uudelleen**, vaan pysyy luokassa R. [3]

Mallin matemaattiset oletukset:

- Populaation koko on vakio $N > 0$:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \qquad \forall\, t \geq 0.$$

- Sairas yksilö toipuu intensiteetillä $\alpha > 0$, nyt **immuuniksi**:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -\beta I(t)S(t) \; \boxed{} \\ \dot{I}(t) &= +\beta I(t)S(t) - \alpha I(t) \\ \dot{R}(t) &= \boxed{+\alpha I(t)} \end{aligned}}$$

Differentiaaliyhtälösysteemi!

---

[3] Vaihtoehtoisesti voidaan tulkita, että yksilö on kuollut sairauteen, jolloin hän luonnollisesti pysyy kuolleiden luokassa R.

SIR-mallin ratkaisu

Koska alimmasta yhtälöstä $\dot{R} = \alpha I$ selviää yksinkertaisella integroinnilla R heti, kun I on tunnettu, riittää tarkastella kahta ylintä yhtälöä

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= -\beta I(t)S(t)\\ \dot{I}(t) &= +\beta I(t)S(t) - \alpha I(t)\end{aligned}$$

Huomataan, että

$$\dot{S}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I(t) = 0 \text{ tai } S(t) = 0$$

ja lisäksi

$$\begin{aligned}&S(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad S \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad I(t) = I_0 e^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad R(t) = R_0 + \alpha \int_0^t I_0 e^{-\alpha t}\, dt\\ &I(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad I \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad S \equiv S_0 \quad \text{ja} \quad R \equiv R_0.\end{aligned}$$

Siis, **jos** $\dot{S}(t) = 0$ jollakin t, löydetään ongelman täydellinen ratkaisu.

SIR-mallin ratkaisu: muuttujan t eliminointi

Edellisen nojalla voidaan olettaa, että $\dot{S}(t) \neq 0$ **kaikilla** $t \geq 0$.
Ts. funktiolla $S = S(t)$ on olemassa **käänteisfunktio** $t = t(S)$, jolle

$$t'(S) = \frac{1}{S'(t(S))} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dt}{dS}(S) = \frac{1}{\frac{dS}{dt}(t(S))} \quad \text{tai} \quad \text{"} \frac{dt}{dS} = \frac{1}{\frac{dS}{dt}} \text{"}.$$

Siispä[4]

$$\frac{\beta I(t(S))S - \alpha I(t(S))}{-\beta I(t(S))S} = \frac{I'(t(S))}{S'(t(S))} = \frac{d}{dS} I(t(S))$$

eli

$$\boxed{\frac{d}{dS} I(t(S)) = -1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{S}}.$$

Integroimalla puolittain ($\int_{S_0}^{S} \cdots \, dS$)

$$I(t(S)) - I(t(S_0)) = S_0 - S + \frac{\alpha}{\beta}(\ln S - \ln S_0).$$

Alkuehdosta $S(0) = S_0$ seuraa $t(S_0) = t(S(0)) = 0$. Kun vielä $I(0) = I_0$,

$$I(t(S)) = (I_0 + S_0 - \frac{\alpha}{\beta}\ln S_0) - S + \frac{\alpha}{\beta}\ln S.$$

[4]Lyhyemmin $\frac{I'}{S'} = \frac{dI}{dt}\frac{dt}{dS} = \frac{dI}{dS}$.

Sijoittamalla $S = S(t)$ (palautetaan alkuperäinen muuttuja), saadaan[5]

$$I(t) = (I_0 + S_0 - \frac{\alpha}{\beta}\ln S_0) - S(t) + \frac{\alpha}{\beta}\ln S(t).$$

Tämä voidaan periaatteessa sijoittaa yhtälöön $\dot{S} = -\beta SI$ ja ratkaista S, sitten vuorostaan I ja R...

Nyt tunnetaan kuitenkin jo alkuarvotehtävän $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ **ratkaisukäyrän** $(S(t), I(t))$ **ura** tasossa $\mathbb{R}^2$. Se on nimittäin funktion[6]

$$I = (I_0 + S_0 - \frac{\alpha}{\beta}\ln S_0) - S + \frac{\alpha}{\beta}\ln S$$

kuvaaja. Käytännössä tietenkin rajoitutaan alueeseen $S \geq 0$, $I \geq 0$.

Yksittäistä pistettä $(S(t_0), I(t_0))$ ratkaisukäyrän uralla kutsutaan **systeemin tilaksi** hetkellä t_0. Differentiaaliyhtälösysteemi siis kertoo, kuinka systeemin tila muuttuu ajan funktiona, yhdestä hetkestä toiseen.

Tätä emme vielä selvittäneet SIR:lle. Harjoituksissa sitten! ☺

[5] $t(S(t)) = t$, sillä $t(S)$ ja $S(t)$ ovat toistensa käänteisfunktioita.
[6] I on tässä lausuttu S:n funktiona.