Differentiaaliyhtälöt I
Luento 4

DY:n numeerinen ratkaiseminen
Teorian sovelluksia

14. elokuuta 2014

DY:n $y' = f(x, y)$ numeerinen ratkaiseminen

DY:n ja derivaatan määritelmän mukaan

$$f(x, y(x)) = y'(x) = \lim_{h \to 0} \tfrac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$\boxed{y(x+h) \approx y(x) + f(x, y(x))\, h \quad \text{kun} \quad h \approx 0}\,. \tag{1}$$

- **Alkuehdolla** $y(x_0) = y_0$ pätee siis

  $$y(x_0 + h) \approx y_0 + f(x_0, y_0)\, h \quad \text{kun} \quad h \approx 0\,.$$

  Huom! Suoran yhtälö kulmakertoimella $f(x_0, y_0)$.
- Nyt halutaan arvioida AAT:n ratkaisua $y(x)$ jonkin annetun välin $[x_0, \bar{x}]$ **kaikissa** tasavälisissä pisteissä

  $$x_0 + h \quad , \quad x_0 + 2h \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_0 + Kh = \bar{x}$$
  $$h = \tfrac{1}{K}(\bar{x} - x_0)$$

  Olkoon pisteitä niin tiheään (K suuri), että h on pieni.
- **Pulma:** $y(x_0 + kh) \approx y_0 + f(x_0, y_0)\, kh$ on **huono arvio**, suurilla k:n arvoilla. [Suora kulmakertoimella $f(x_0, y_0)$.]

Pulman ratkaisuna murtoviiva: Eulerin menetelmä

Nimetään pisteet $x_k = x_0 + kh$ eli

$$x_1 = x_0 + h \quad , \quad x_2 = x_0 + 2h \quad , \quad \dots \quad , \quad x_K = x_0 + Kh = \bar{x} \; .$$

1. Edellisen perusteella $y(x_1) \approx y_1 := y_0 + f(x_0, y_0)\, h$
2. Kohdellaan nyt pistettä (x_1, y_1) **AAT:n alkuehtona**! Edellinen toistamalla saadaan $y(x_2) \approx y_2 := y_1 + f(x_1, y_1)\, h$.

   Osoittautuu, että $y(x_2) \approx y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\, h$ on **parempi arvio** kuin aiemmin ehdotettu $y(x_2) \approx y_0 + f(x_0, y_0)\, 2h$.
   - x muuttui vain h:n verran $2h$:n sijaan
   - Laskettiin f pisteessä (x_1, y_1) kaukaisemman pisteen (x_0, y_0) sijaan
3. Toistetaan siis menetelmää rekursiivisesti:

$$\begin{aligned}
y(x_3) &\approx y_3 := y_2 + f(x_2, y_2)\, h \\
y(x_4) &\approx y_4 := y_3 + f(x_3, y_3)\, h \\
&\;\vdots \\
y(x_K) &\approx y_K := y_{K-1} + f(x_{K-1}, y_{K-1})\, h
\end{aligned}$$

Tämä on **Eulerin menetelmä**.

Eulerin menetelmän pätevyys

Olkoon $f(x, y)$ jatkuvasti derivoituva[1]*. Kun Eulerin menetelmää sovelletaan alkuarvotehtävään $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, annetulla välillä $[x_0, \bar{x}]$, on olemassa sellainen vakio $C > 0$, että virhearvio*

$$|y(x_k) - y_k| \leq Ch \qquad \forall\, k = 1, \ldots, K$$

pätee todellisen ratkaisun ja Eulerin menetelmän arvion erotukselle.

- Eulerin menetelmässä virhe pienenee suoraan verrannollisesti askeleen h kokoon. Jos askelta h pienennetään kymmenesosaan, pienenee myös virhe $|y(\bar{x}) - y_K|$ kymmenesosaan. **Ensimmäisen asteen (h^1) menetelmä.**
- On olemassa monta muuta menetelmää, jotka soveltuvat eri tavoin eri yhtälöille. Ne on implementoitu valmiiksi erilaisissa tietokoneohjelmissa (Maple, Matlab, Mathematica...)
- Esim. Runge–Kutta -menetelmä on **neljännen asteen (h^4) menetelmä**: jos h pienennetään kymmenesosaan, pienenee virhe **kymmenestuhannesosaan**.

[1] Siis $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ jatkuvia. Ohitamme myös tiettyjä teknisiä oletuksia.

Esimerkki Eulerin menetelmästä

Arvioidaan alkuarvotehtävän

$$y' = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 4$$

ratkaisun arvo pisteessä $x = \bar{x} = \frac{3}{2}$ Eulerin menetelmällä.

Nyt siis $[x_0, \bar{x}] = [1, \frac{3}{2}]$. Käytetään vaikkapa viittä pistettä ($K = 5$), jolloin askelkoko on $h = \frac{\bar{x} - x_0}{K} = \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10}$. Alkuehto: $(x_0, y_0) = (1, 4)$.

k	x_k	$y_k = y_{k-1} + x_{k-1}\sqrt{y_{k-1}}\,\frac{1}{10}$
1	1.1	4.2
2	1.2	4.42543
3	1.3	4.67787
4	1.4	4.95904
5	1.5	$\mathbf{5.27081} \approx y(\frac{3}{2})$

Tarkistetaan tulos: yhtälö on separoituva ja

$$y(x) = \frac{1}{16}(x^2 + 7)^2,$$

joten $y(\frac{3}{2}) = \mathbf{5.34766}\ldots$ (Aika hyvin!)

Sovelluksia

Käsittelemme tänään aiemmin opitun teorian sovelluksina

- Sekoitusmalleja
- Populaatiomalleja
  - Eksponentiaalinen kasvumalli (eli Malthusin malli)
  - Logistinen malli

Sekoitusmallit

- **Tankissa** on aluksi
  - V_0 litraa suolavettä,
  - johon liuenneena on x_0 kilogrammaa suolaa.
- **Tankkiin** virtaa suolavettä
  - nopeudella F_{in} l/min,
  - jonka pitoisuus on p_{in} kg/l. (Luentomonisteessa $p_{in} = a$.)
- **Tankista** virtaa ulos suolavettä nopeudella F_{out} l/min.
- Tankissa on tehokas sekoitin: liuos pysyy homogeenisena.
- Mitataan kulunutta aikaa t minuuteissa.
- Hetkellä t tankissa on
  - $V(t)$ litraa suolavettä,
  - jossa suolaa $x(t)$ kilogrammaa.
  - Pitoisuus on siis $p(t) = \frac{x(t)}{V(t)}$ kg/l.
- Huom! Sekä F_{in}, F_{out} että p_{in} voivat riippua ajasta ☺.

Kysymys: Kuinka paljon suolavettä ja suolaa tankissa on hetkellä t?

- On siis ratkaistava $V(t)$ ja $x(t)$.

Suolaveden määrän $V(t)$ muutosnopeus toteuttaa selvästi yhtälön[2]

$$\dot{V}(t) = F_{in}(t) - F_{out}(t).$$

Siispä

$$V(t) = V_0 + \int_0^t F_{in}(\tau) - F_{out}(\tau)\, d\tau.$$

Suolaa virtaa

- **tankkiin** nopeudella $p_{in}(t)F_{in}(t)$ kg/min;
- **tankista** nopeudella $p(t)F_{out}(t) = \frac{x(t)}{V(t)}F_{out}(t)$ kg/min.

Suolan määrän $x(t)$ muutosnopeudelle saadaan näinollen

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = p_{in}(t)F_{in}(t) - \frac{x(t)}{V(t)}F_{out}(t) \\ \Leftrightarrow \quad &\dot{x}(t) = p_{in}(t)F_{in}(t) - \frac{F_{out}(t)x(t)}{V_0 + \int_0^t F_{in}(\tau) - F_{out}(\tau)\, d\tau}. \end{aligned}$$

Tämä on $x(t)$:lle **ensimmäisen kertaluvun lineaarinen yhtälö**.

[2] Aikaderivaattaa on tapana merkitä pisteellä funktion päällä: esim. $\dot{V}(t) = \frac{dV(t)}{dt}$.

Eksponentiaalinen kasvumalli (Malthusin malli)

- Populaation koko[3] ajanhetkellä t on $N(t)$.
- Populaation koon muutosnopeus on verrannollinen sen kokoon:

$$\dot{N}(t) = r\,N(t). \tag{2}$$

- Verrannollisuuskerroin r (vakio) on nk. **Malthusin parametri**.
- Populaation koko alussa on

$$N(0) = N_0. \tag{3}$$

- AAT:n (2)–(3) ratkaisu on (miksi?)

$$N(t) = N_0 e^{rt}, \quad t \geq 0.$$

  - $r > 0$: populaatio kasvaa eksponentiaalisesti;
  - $r < 0$: populaatio pienenee eksponentiaalisesti;
  - $r = 0$: populaatio pysyy vakiokokoisena.

[3] Bakteerien lukumäärä viljelmässä tms.

Malthusin parametrin tulkinta. Yhtälöstä (2) saadaan

$$N(t+h) - N(t) = r \int_t^{t+h} N(\tau)\, d\tau \approx hr\, N(t) \quad \text{kun } h \approx 0.$$

- **Lyhyen** ajanjakson $[t, t+h]$ kuluessa populaation koko muuttuu tekijällä hr.
- Esimerkiksi: aikavälillä $[t, t+h]$ jokainen yksilö tuottaa hr jälkeläistä.
- Yleisemmin $r = (\beta - \mu)$ seuraavalla tulkinnalla: aikavälillä $[t, t+h]$ jokainen yksilö tuottaa $h\beta$ jälkeläistä ja toisaalta $h\mu$ yksilöä kuoli.

$$N(t) = N_0 e^{\beta t} e^{-\mu t}.$$

$\beta =$ ”syntyvyysintensiteetti” ja $\mu =$ ”kuolleisuusintensiteetti”.

Logistinen malli

Muokataan (korjataan?!) edellistä mallia hieman liikakansoituksen välttämiseksi. (Pula resursseista, lisääntynyt väkivalta, yms.)

- Populaation koko on $N(t) \Rightarrow$ **Pareja** on $\binom{N(t)}{2} = \frac{1}{2}N(t)(N(t)-1)$
- Kukin pari "törmää" toisiinsa intensiteetillä $\alpha > 0$, jolloin toinen pareista kuolee:

$$\begin{aligned} N(t+h) - N(t) &\approx h\left[r\,N(t) - \tfrac{1}{2}\alpha N(t)(N(t)-1)\right] \quad \text{kun } h \approx 0 \\ &= h\left[\left(r - \tfrac{1}{2}\alpha\right)N(t) - \tfrac{1}{2}\alpha N(t)^2\right] \end{aligned}$$

- Vaihtamalla uuteen merkintään $r = \left(\beta - \mu - \frac{1}{2}\alpha\right)$ tämä johtaa **logistiseen yhtälöön**

$$\dot{N}(t) = r\,N(t) - \tfrac{1}{2}\alpha N(t)^2.$$

Merkinnällä $K = 2r/\alpha$ tämä muuttuu muotoon

$$\dot{N}(t) = r\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$

$K =$ "ympäristön kantokyky". Oletetaan $K > 0$ (eli $r > 0$)

Yhtälön $\dot{N}(t) = r\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ ratkaisu

Se on **Bernoullin yhtälö**[4] parametrilla $\lambda = 2$!

Sijoituksella $z(t) = N(t)^{-1}$ saadaan $\dot{z}(t) = -N(t)^{-2}\dot{N}(t) = -z(t)^2\dot{N}(t)$.

$$\dot{z}(t) = -z(t)^2\dot{N}(t) = -z(t)^2 r\,N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = -z(t)r\left(1 - \frac{1}{K\,z(t)}\right)$$

eli

$$\dot{z}(t) + rz(t) = \frac{r}{K}.$$

Se on lineaarinen yhtälö; integroiva tekijä on $\mu(t) = e^{rt}$, joten (laske!)

$$\frac{d}{dt}(e^{rt}z) = \frac{r}{K}e^{rt} \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = \frac{1}{K} + Ce^{-rt}.$$

Alkuehto

$$N(0) = N_0 \quad \Leftrightarrow \quad z(0) = \frac{1}{N_0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{K} + C = \frac{1}{N_0} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{K - N_0}{N_0 K}.$$

Saadaan[5]

$$N(t) = z(t)^{-1} = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \qquad (t \geq 0).$$

---

[4] $y' + p(x)y = q(x)y^{\lambda}$; ratkeaa sijoituksella $z(x) = y(x)^{1-\lambda}$.

[5] Harjoituksissa tutkitaan ratkaisun N ominaisuuksia!