Differentiaaliyhtälöt I
Luento 3

Ensimmäisen kertaluvun yhtälöt (osa 3)

13. elokuuta 2014

Eksaktit yhtälöt ovat melko yleisiä

Tähän mennessä on käsitelty

- separoituvia yhtälöitä $y' = p(x)q(y)$
- 1. kertaluvun lineaarisia yhtälöitä $y' + p(x)y = q(x) \quad \text{(LY)}$
- eksakteja yhtälöitä $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ missä $\boxed{\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}}$.

Osoittautui, että **separoituva yhtälö on aina ekstakti**.

LY ei aina ole eksakti, mutta se **palautuu aina eksaktiksi**:

- Integroiva tekijä $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$; kerrotaan LY puolittain sillä:

$$\begin{aligned} LY \quad &\Leftrightarrow \quad \mu y' + \mu p y = \mu q \quad \Leftrightarrow \quad (\mu y)' = \mu q \\ &\Leftrightarrow \quad -\mu q + (\mu y)' = 0 \end{aligned}$$

- Merk. $z(x) = \mu(x)y(x)$. Kun $M(x,z) = -\mu(x)q(x)$ ja $N(x,z) = 1$,

$$LY \quad \Leftrightarrow \quad M(x,z) + N(x,z)z' = 0 \quad \text{missä} \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}}.$$

Yhtälön $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ palautus eksaktiksi

Ei onnistu aina!

Yritetään etsiä integroiva tekijä $\mu(x)$, jolle $\mu M + \mu N y' = 0$ on eksakti.
Eksaktisuusehto:

$$\frac{\partial(\mu(x)M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x)N(x,y))}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \mu(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \mu'(x)N(x,y) + \mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \mu(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \mu'(x)N(x,y)$$

$$\text{”}\Leftrightarrow\text{”}\ \mu'(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)\mu(x)$$

Jos funktio (oletetaan määritellyksi)

$$h(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)$$

riippuu vain x**:stä eikä lainkaan** y**:stä**, niin saatiin

$$\mu'(x) = h(x)\mu(x) \quad \text{eli} \quad \boxed{\mu(x) = e^{\int h(x)\,dx}}\,.$$

Lause (Yhtälö $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ eksaktiksi)

Olkoot M ja N jatkuvasti derivoituvia reiättömässä alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$.

- Jos funktio

$$h(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)$$

riippuu vain x:stä, niin yhtälöllä on integroiva tekijä

$$\mu(x) = e^{\int h(x)\,dx},$$

jolle $\mu M + \mu N y' = 0$ on eksakti.

- Vastaavasti, jos funktio

$$g(y) = \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)$$

riippuu vain y:stä, niin yhtälöllä on integroiva tekijä

$$\mu(y) = e^{\int g(y)\,dy}.$$

Tod: $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = \cdots = (\mu h - \mu')N = 0$. Eksaktisuuslause.[1] $\square$

[1] Lause oli muotoiltu reiättömälle suorakaiteelle, mutta reiätön alue riittää.

Esimerkki (sivu 1/2)

Yhtälö

$$M + Ny' = (x + 3x^3 \sin y) + (x^4 \cos y)y' = 0$$

ei ole eksakti. Mutta

$$h(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{-x^3 \cos y}{x^4 \cos y} = -\frac{1}{x}$$

riippuu vain x:stä, joten edellinen lause pätee. Integroiva tekijä on

$$\mu(x) = e^{\int h(x)\,dx} = e^{-\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{e^{\ln|x|}} = \frac{1}{|x|} \quad (x \neq 0).$$

Kerrotaan yhtälö puolittain $\mu(x)$:llä:

$$\begin{cases} (1 + 3x^2 \sin y) + (x^3 \cos y)y' = 0 & (x > 0) \\ -(1 + 3x^2 \sin y) - (x^3 \cos y)y' = 0 & (x < 0) \end{cases}$$

eli lyhyemmin

$$(1 + 3x^2 \sin y) + (x^3 \cos y)y' = 0 \quad (x \neq 0).$$

Tämä yhtälö on eksakti itse asiassa alueessa $D = \mathbb{R}^2$.

Esimerkki (sivu 2/2)

Edellisen sivun eksakti yhtälö:

$$\tilde{M} + \tilde{N}y' = (1 + 3x^2 \sin y) + (x^3 \cos y)y' = 0 \quad (x \neq 0).$$

Potentiaali: (nyt on helpompi integroida $\int \tilde{M}\,dx$ kuin $\int \tilde{N}\,dy$)

$$F(x,y) = \int \tilde{M}\,dx + \boxed{g(y)} = x + x^3 \sin y + g(y).$$

Toisaalta potentiaalille pätee

$$\begin{aligned} \tilde{N} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 \cos y = x^3 \cos y + g'(y) \\ &\Leftrightarrow \quad g'(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(y) = \text{vakio}. \end{aligned}$$

Siis $F(x,y) = x + x^3 \sin y + \text{vakio}$. Implisiittiratkaisu on

$$F(x,y) = C \quad \Leftrightarrow \quad x + x^3 \sin y = C \quad (x \neq 0).$$

Saadaanko tästä **kaikki** alkuperäisen yhtälön ratkaisut? Jaettiin x:llä, joten ainoa ongelmakohta voi olla $x = 0$. Sen ympäristössä ($x \approx 0$) ratkaisut ovat molemmille yhtälöille samat ja jatkuvat.

Sijoitukset ja muunnokset

Yllä tehtiin **muunnos** $z(x) = \mu(x)y(x)$, joka palautti LY:n eksaktiksi.

Yleisemmällekin[2] muotoa $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ olevalle yhtälölle löytyi integroiva tekijä ja muunnos, joka palautti sen eksaktiksi.

Kaikki 1. kertaluvun yhtälöt **eivät** ole separoituvia, lineaarisia tai eksakteja. Joskus ne palautuvat sellaisiksi sijoituksella/muunnoksella.

Käsitellään neljä erikoistapausta:

1. Bernoullin yhtälöt $y' + p(x)y = q(x)y^{\lambda}$
2. Tasa-asteiset yhtälöt $y' = f(\frac{y}{x})$
3. $y' = f(ax + by)$
4. $y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ (tasa-asteiseksi palautuva)

Tarkoitus on siis soveltaa **jo opittuja ratkaisumenetelmiä** yhä laajempaan differentiaaliyhtälöiden joukkoon!

[2]Ei kuitenkaan kaikille yhtälöille $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$!!

Bernoullin yhtälöt $y' + p(x)y = q(x)y^\lambda$

- $\lambda \in \mathbb{R}$ on parametri. Oletetaan $\lambda \neq 0, 1$. (Miksi?)
- p ja q jatkuvia.
- Jos $\lambda > 0$, niin triviaaliratkaisu $y \equiv 0$.
- Kun $y > 0$, OY-lause pätee. Tapaus $y < 0$ riippuu λ:n arvosta.
- Niille ratkaisuille, joille $y(x) \neq 0$, on ekvivalentti yhtälö

$$y^{-\lambda}y' + p(x)y^{1-\lambda} = q(x) \tag{1}$$

Yhtälö (1) ratkeaa sijoituksella

$$z(x) = y(x)^{1-\lambda}.$$

Saadaan nimittäin z:aa derivoimalla

$$\begin{aligned} & z'(x) = (1-\lambda)y(x)^{-\lambda}y'(x) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{1-\lambda}z' + p(x)z = q(x) \end{aligned}$$

Lineaarinen yhtälö!

Tasa-asteiset yhtälöt $y' = f(\frac{y}{x})$

- Funktio $g(x, y)$ on tasa-asteinen, jos $g(tx, ty) = g(x, y) \;\forall\, t \neq 0$.
  - **Harjoitus:** Funktio $g(x, y)$ on tasa-asteinen $\Rightarrow$ se riippuu vain osamäärän $\frac{y}{x}$ arvosta, kun $x \neq 0$, eli $g(x, y) = f(\frac{y}{x})$.
- OY-lause pätee, jos f on jatkuvasti derivoituva.

Yhtälö ratkeaa sijoituksella

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = x\, z(x), \quad x \neq 0.$$

Saadaan nimittäin yhtälöä $y(x) = x\, z(x)$ derivoimalla

$$\begin{aligned} y'(x) = z(x) + x\, z'(x) \quad &\Leftrightarrow \quad f(\tfrac{y}{x}) = z + x\, z' \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = z + x\, z' \\ &\Leftrightarrow \quad z' = \frac{f(z) - z}{x} \end{aligned}$$

Separoituva yhtälö!

Muotoa $y' = f(ax + by)$ olevat yhtälöt

- Oletetaan, että $b \neq 0$. (Miksi?)
- OY-lause pätee, jos f on jatkuvasti derivoituva.

Yhtälö ratkeaa sijoituksella

$$z(x) = ax + by(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{b}(z - ax).$$

Saadaan nimittäin yhtälöä $y = \frac{1}{b}(z - ax)$ derivoimalla

$$y' = \frac{1}{b}(z' - a) \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = \frac{1}{b}(z' - a) \quad \Leftrightarrow \quad z' = a + bf(z)$$

Separoituva yhtälö!

Tasa-asteiseksi palautuvat yhtälöt $y' = f(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2})$

- Tehdään oletukset $a_1, b_1, a_2, b_2 \neq 0$, jotta käsittely lyhenee.
  - Muihin tapauksiin puree yksinkertaisempi menettely.

Muunnetaan sekä x että y: (α, β parametreja, jotka valitaan alla)

$$\begin{cases} x = t + \alpha \\ y(x) = z(x - \alpha) + \beta = z(t) + \beta \end{cases}$$

Huomaa, että $y'(x) = z'(x - \alpha) = z'(t)$. Lisäksi

$$a_k x + b_k y(x) + c_k = a_k t + b_k z(t) + \underbrace{a_k \alpha + b_k \beta + c_k}_{=0\ ??} \qquad k = 1, 2.$$

Jos todella $a_k \alpha + b_k \beta + c_k = 0$, niin saatiin

$$z' = f(\tfrac{a_1 t + b_1 z}{a_1 t + b_1 z}) = f(\tfrac{a_1 + b_1 z/t}{a_1 + b_1 z/t}) = g(\tfrac{z}{t}) \quad (t \neq 0).$$

Tasa-asteinen yhtälö!

Pyritään nyt valitsemaan α, β niin, että $a_k\alpha + b_k\beta + c_k = 0$. Siis

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 & | \cdot b_2 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 & | \cdot b_1 \end{cases}$$

josta

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\alpha + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0.$$

Samoin

$$-(a_1b_2 - a_2b_1)\beta + (a_2c_1 - a_1c_2) = 0.$$

Siispä α ja β löytyvät, jos $\boxed{a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0}$.

Jos kuitenkin $\boxed{a_1b_2 - a_2b_1 = 0}$, niin $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = d$ eli alkuperäinen yhtälö on valmiiksi muotoa

$$y' = f\left(\tfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) = f\left(\tfrac{d(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}\right) = g(a_2x + b_2y),$$

joka palautui jo aiemmin **separoituvaksi**.