Differentiaaliyhtälöt I
Luento 2

Ensimmäisen kertaluvun yhtälöt (osa 2)

6. elokuuta 2014

Lokaali olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause (OY-lause)

Olkoon D tason $\mathbb{R}^2$ **alue**, ja olkoot funktio $f = f(x, y)$ sekä sen osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial y}$ jatkuvia siinä. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$.

(a) Tällöin **alkuarvotehtävällä (AAT)**

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

on jollakin avoimella välillä I määritelty ratkaisu[1] $y : I \to \mathbb{R}$. [Ja $x_0 \in I$.]

(b) Olkoon $x_0 \in I_1 \cap I_2$, ja olkoot $y_k : I_k \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2)$ kaksi kyseisen AAT:n ratkaisua, jotka kulkevat D:ssä [eli $(x, y_k(x)) \in D$ kaikilla $x \in I_k$, $k = 1, 2$]. Tällöin

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \forall\, x \in I_1 \cap I_2.$$

- Todistus: Diffis II

[1] Ratkaisu on jatkuvasti derivoituva. Miksi?

Poistumislause

Olkoon D tason $\mathbb{R}^2$ alue, ja olkoot funktio $f = f(x, y)$ sekä sen osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial y}$ jatkuvia siinä. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$.

(a) Tällöin alkuarvotehtävällä (AAT)

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

on **maksimaaliratkaisu** $y : I \to \mathbb{R}$, jolle ratkaisukäyrä $\{(x, y(x)) : x \in I\}$ kulkee alueessa D, ja sen **hännät poistuvat kyseisen alueen reunalle**.

(b) Maksimaaliratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$ on **yksikäsitteisesti määrätty**, ja kaikki muut AAT:n ratkaisut D:ssä ovat sen **rajoittumia**.

- Todistus: Diffis II

Separoituvat differentiaaliyhtälöt

Määritelmä 1.4

Ensimmäisen kertaluvun DY on **separoituva**, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$y' = p(x)q(y),$$

missä p ja q ovat tunnettuja yhden muuttujan funktioita.

Kysymys (pohdi naapurin kanssa)

Mitkä ovat luonnolliset oletukset funktioista p ja q? (Miksi?)

Esimerkki

Radioaktiivisen hajoamisen esimerkki on separoituva:

$$A'(t) = -kA(t) = p(t)q(A(t)),$$

missä

$$p(t) \equiv -k \quad ja \quad q(A) = A.$$

Separoituvan yhtälön $y' = p(x)q(y)$ ratkaiseminen

Olkoon p jatkuva ja q jatkuvasti derivoituva. (Miksi?)

(1) Jokaista q:n nollakohtaa y_0 vastaa **triviaali ratkaisu**:

$$y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \equiv y_0$$

(2) Oletetaan seuraavaksi, että $q \neq 0$ jollakin välillä. Kyseisellä välillä ratkaisun $y = y(x)$ on toteutettava

$$\begin{aligned} y'(x) = p(x)q(y) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{q(y(x))} = p(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{q(y(x))}\,dx = \int p(x)\,dx + C. \end{aligned}$$

Toisaalta,

$$H(y) = \int \frac{1}{q(y)}\,dy \quad \Longrightarrow \quad \frac{dH(y(x))}{dx} = H'(y(x))y'(x) = \frac{y'(x)}{q(y(x))}$$

eli

$$\boxed{H(y(x)) = \int p(x)\,dx + C}\,.$$

Usein kirjoitetaan vain lyhyesti

$$\int \frac{1}{q(y)}\,dy = \int p(x)\,dx + C\,.$$

Tämä on helppo muistaa ”kertomalla yhtälö ristiin”:

$$\begin{aligned} y' &= p(x)q(y) \\ \frac{dy}{dx} &= p(x)q(y) \\ \frac{1}{q(y)}\,dy &= p(x)\,dx \end{aligned}$$

sekä lisäämällä integraalimerkit ja vakio.

Esimerkki

Yhtälö

$$y' = xy$$

on separoituva: $p(x) = x$ ja $q(y) = y$. Lisäksi p on jatkuva ja q jatkuvasti derivoituva, joten OY-lause pätee.

(1) Triviaaliratkaisu: $y \equiv 0$.

(2) Muut ratkaisut:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= xy \\
\frac{1}{y}\,dy &= x\,dx \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \int x\,dx \\
\ln|y| &= \frac{1}{2}x^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\
|y| &= e^{\frac{1}{2}x^2} e^{C_1} = C_2 e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad C_2 > 0 \\
y &= C_3 e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad C_3 \neq 0.
\end{aligned}$$

Triviaaliratkaisu voidaan tällä kertaa yhdistää edelliseen:

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ensimmäisen kertaluvun lineaariset yhtälöt (LY)

- **Standardimuotoinen LY** $\boxed{y'(x) + p(x)y(x) = q(x)}$
  - $L : y \mapsto y' + py$ on lineaarinen differentiaalioperaattori:
    $$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 \quad \text{ja} \quad L(ay) = aL(y).$$
  - LY $\quad\Leftrightarrow\quad Ly = q \quad\Leftrightarrow\quad (Ly)(x) = q(x)$
- **Homogeeniyhtälö (HY)** $\boxed{y'(x) + p(x)y(x) = 0}$
  - HY $\quad\Leftrightarrow\quad Ly = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (Ly)(x) = 0$

Etsitään **Integroiva tekijä** $\mu(x)$:
Halutaan kirjoittaa LY integroituvassa muodossa $(\mu y)' = \mu q$. Silloin

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)\,dx + C\right)}$$

Integroiva tekijä $\mu(x)$: Vaaditaan

$$\begin{aligned} (\mu y)' &= \mu q \quad \Leftrightarrow \quad y' + py = q \\ \mu' y + \mu y' &= \mu q \quad \Leftrightarrow \quad \mu(y' + py) = \mu q \qquad\qquad (\mu(x) \neq 0) \end{aligned}$$

Näin on, jos μ ratkaisee separoituvan yhtälön $\mu' = \mu p$. Valitaan

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}}$$

Sijoittamalla yleiseen ratkaisuun,

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) q(x)\, dx + C \right) \\ \Leftrightarrow \quad & \boxed{y(x) = Ce^{-\int p(x)\, dx} + e^{-\int p(x)\, dx} \int e^{\int p(x)\, dx} q(x)\, dx} \quad . \end{aligned}$$

- **Alkuarvotehtävälle** kaikki integraalit korvataan määrätyillä integraaleilla $\int_{x_0}^{x} \cdots \, dt$. (Luentomoniste.)

Lause (Superpositioperiaate HY:lle)

Jos y_1 ja y_2 ovat HY:n ratkaisuja, niin myös $y = ay_1 + by_2$ on ratkaisu.

Todistus.

HY $Ly = 0$ toteutuu, koska L on lineaarinen operaattori. (Tarkista!) $\square$

Lause (LY:n ratkaisujen ja HY:n ratkaisujen suhde)

LY:n kaikki ratkaisut saadaan lausekkeesta

$$y(x) = Cy_0(x) + y_1(x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tässä Cy_0 on HY:n yleinen ratkaisu, y_1 on LY:n **jokin** *yksittäisratkaisu.*

Todistus.

– Seuraa L:n lineaarisuudesta; **lue monisteesta!**

– Tulos todistetaan myös harjoitustehtävänä. $\square$

Esimerkki LY: $y' + 2y = 3e^x$

- HY:n $y' + 2y = 0$ yleinen ratkaisu saadaan separoimalla: $y(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

- Etsitään LY:n yksi erityisratkaisu yritteellä $y(x) = Ae^x$. (Vrt. epähomogeeninen termi $3e^x$.)

$$y' + 2y = Ae^x + 2Ae^x = 3e^x \quad \Leftrightarrow \quad 3Ae^x = 3e^x \quad \Leftrightarrow \quad A = 1.$$

- LY:n kaikki ratkaisut näiden summana:

$$y(x) = Ce^{-2x} + e^x, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Eksaktit yhtälöt

Monet 1. kertauluvun differentiaaliyhtälöt voidaan palauttaa muotoon

$$\boxed{M(x,y) + N(x,y)y' = 0} \tag{1}$$

Olisi erityisen mukavaa, jos vasemman puolen olisi muotoa

$$M(x,y(x)) + N(x,y(x))y'(x) = \frac{d}{dx}F(x,y(x))$$

jollakin funktiolla $F(x,y)$: Silloin löydetään **implisiittiratkaisut**

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = M(x,y(x)) + N(x,y(x))y'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{F(x,y(x)) = C}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Huomaa derivoimiskaava

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))y'(x).$$

Olisi riittävää siis löytää sellainen **potentiaali** $F(x,y)$, että

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{ja} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N} \tag{2}$$

Määritelmä

Yhtälö (1) *on* **eksakti** *alueessa* $D \subset \mathbb{R}^2$, *jos on olemassa kahdesti jatkuvasti derivoituva* $F : D \to \mathbb{R}$, *jolle pätee* (2) *kaikilla* $(x, y) \in D$.

Lause (Eksaktisuuslause)

Olkoot $M(x, y)$ *ja* $N(x, y)$ *jatkuvasti derivoituvia funktioita suorakaiteen muotoisessa,* **reiättömässä** *alueessa* $R \subset \mathbb{R}^2$. *Tällöin yhtälömme* $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ *on eksakti tarkalleen silloin, kun*

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)} \quad \forall\ (x, y) \in R.$$

Tämä on nk. **eksaktisuusehto**.

Esimerkki (Separoituva yhtälö on eksakti)

Yhtälöllä $y' = p(x)q(y)$ *on triviaaliratkaisu* $y \equiv y_0$ *jokaisessa* q*:n nollakohdassa* y_0. *Muutoin voidaan kirjoittaa*

$$y' = p(x)q(y) \quad \Leftrightarrow \quad p(x) - \frac{1}{q(y)}y' = M + Ny' = 0.$$

Eksaktisuusehto: $\partial M/\partial y = 0 = \partial N/\partial x$.

Eksaktisuuslauseen todistus

(i) Jos potentiaali F on olemassa, niin eksaktisuusehto pätee:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

(ii) Jos eksaktisuusehto $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ pätee: Olkoon $(x_0, y_0) \in R$ jokin piste suorakaiteessa. Voidaan määritellä potentiaali

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y)\, ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)\, dt = \int_{x_0}^{x} M(s, y)\, ds + g(y)$$

Nähdään derivoimalla, että

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$$

ja eksaktisuusehto muistaen myös, että

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(s, y)\, ds + N(x_0, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial s}(s, y)\, ds + N(x_0, y) \\ &= N(x, y). \qquad \square \end{aligned}$$

Löysimme potentiaalin

$$\boxed{F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds+\int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\,dt=\int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds+g(y)}$$

Yhtä hyvin olisi voitu määritellä

$$\boxed{F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(s,y_0)\,ds+\int_{y_0}^{y} N(x,t)\,dt=h(x)+\int_{y_0}^{y} N(x,t)\,dt}$$

Se kumpaa kannattaa käyttää, riippu ongelmasta:

- Jos on helpompaa laskea integraali $\int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds$, käytetään ensimmäistä.
- Jos on helpompaa laskea integraali $\int_{y_0}^{y} N(x,t)\,dt$, käytetään jälkimmäistä.